



PROJETO DE GRADUAÇÃO

MÉTODO DA FRONTEIRA IMERSA COM MÉTODO DE PROJEÇÃO

Por,

Rogério Ghiraldeli Botelho De Paula

Brasília, 6 de dezembro de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**MÉTODO DA FRONTEIRA IMERSA COM
MÉTODO DE PROJEÇÃO**

Por,
Rogério Ghiraldeli Botelho De Paula

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Taygoara Felamingo, UnB/ENM (Orientador) _____

Prof. Adriano Possebon , UnB/ENM _____

Prof. Roberto Miserda , UnB/ENM _____

Brasília 6 de dezembro de 2019

*“Há toda uma arte, ou melhor, um jeitinho para voar.
O jeitinho consiste em aprender como se jogar no chão e errar.
Encontre um belo dia e experimente.
A primeira parte é fácil.”
(Guia do Mochileiro das Galáxias)*

Agradecimentos

Agradeço a minha família, principalmente aos meus pais, Rosa e Rogério, e ao meu irmão Flávio por todo o carinho apoio que me deram para que pudesse chegar até aqui, além de me incentivar a sempre buscar desafios.

Agradeço ao meu orientador Taygoara pelos conhecimentos transmitidos, contribuindo tanto para minha formação acadêmica quanto pessoal, além da paciência para me orientar.

Agradeço também aos professores Roberto e Adriano pela contribuição no desenvolvimento e avaliação deste trabalho. Além se estarem sempre disponíveis caso eu necessita-se de ajuda.

Agradeço aos meu amigos Bruno, Gabi, Henrique, Mota e Yaoi pelas várias risadas que compartilhamos e pelo apoio nos momentos sérios. Agradeço também aos meus amigos que a faculdade me trouxe, Ernesto, Matheus, Giovana, Guilherme, Luiza, Shumy e tantos outros que seria necessário várias páginas para citar todos. Agradeço a equipe Draco Volans e a todos os membros com os quais convivi pelos momentos de trabalho e diversão em muitas madrugadas.

Agradeço a todos que contribuíram de maneira direta e indireta para chegar a este ponto. Obrigado.

Resumo

Este trabalho apresenta uma revisão sobre os métodos de projeção e fronteira imersa. Desenvolveu-se um método numérico para simulação de escoamentos em corpos rígidos em um problema com entrada e saída de fluido. Para isso, utilizou-se o método de Crank-Nicolson para discretização no tempo e o método das diferenças finitas com malha defasada para discretização espacial. Simulações de um escoamento ao redor de um cilindro foram feitas e os resultados obtidos para o campo de velocidades, campo de pressão, linhas de corrente e coeficientes aerodinâmicos foram analisados. O método utilizado se mostrou satisfatório em vários quesitos como coeficientes aerodinâmicos, número de Strouhal. Entretanto, a condição de aderência não foi atingida devido a uma pequena diferença. Os resultados mostram que o método produz resultados satisfatórios mas com ressalvas.

Palavras-chaves: Fronteira imersa, IBM, Método de Projeção, Diferenças Finitas

Abstract

This work presents a review over the projection method and immersed boundary method. A numerical method was developed to simulate flow around a rigid body with inlet and outlet flow conditions. A Crank-Nicolson scheme is used for time discretization and finite differences are used with a staggered grid for spatial discretization. Simulations of flow around a circular cylinder were performed and the results of field velocity, pressure field, streamlines and aerodynamic coefficients were analyzed. The implemented method showed satisfactory results as in lift and drag coefficients and Strouhal number. However, results as the no-slip condition were not achieved, due to a small difference, indicating that the method produce satisfactory results but with caveats.

Key-words: Immersed Boundary, IBM, Projection Method, Finite Difference

Lista de Figuras

Figura 1 – Turbina hidrocínética parcialmente submersa	2
Figura 2 – Hélice sofrendo de cavitação	2
Figura 3 – Representação do escoamento ao redor do cilindro com condições de contorno	3
Figura 4 – Representação da malha cartesiana e do corpo imerso	12
Figura 5 – Região de influência na malha Euleriana da força \mathbf{F}_k no ponto \mathbf{X}_k . . .	12
Figura 6 – Representação de uma malha defasada bidimensional	19
Figura 7 – Domínio computacional	28
Figura 8 – Discretização perto da superfície	29
Figura 9 – Componente u em diferentes instantes de tempo - $Re = 100$	31
Figura 10 – Componente v em diferentes instantes de tempo - $Re = 100$	31
Figura 11 – Velocidade medida na sonda no tempo - $Re = 100$	32
Figura 12 – Campo de pressão em diferentes instantes de tempo - $Re = 100$	33
Figura 13 – Pressão medida na sonda no tempo - $Re = 100$	34
Figura 14 – Coeficientes aerodinâmicos no tempo - $Re = 100$	34
Figura 15 – Vorticidade em diferentes instantes - $Re = 100$	36
Figura 16 – Componente u em diferentes instantes - $Re = 150$	37
Figura 17 – Componente v em diferentes instantes - $Re = 150$	37
Figura 18 – Velocidade medida na sonda no tempo - $Re = 150$	38
Figura 19 – Campo de pressão em diferentes instantes - $Re = 150$	39
Figura 20 – Pressão medida na sonda no tempo - $Re = 150$	40
Figura 21 – Coeficientes aerodinâmicos no tempo - $Re = 150$	40
Figura 22 – Coeficientes de arrasto - $Re = 150$ - retirado de (LAI; PESKIN, 2000) .	41
Figura 23 – Coeficientes de sustentação - $Re = 150$ - retirado de (LAI; PESKIN, 2000)	41
Figura 24 – Vorticidade em diferentes instantes - $Re = 150$	42
Figura 25 – Contornos instantâneos de vorticidade para $Re = 150$ (LAI; PESKIN, 2000)	43
Figura 26 – Componente u em diferentes instantes - $Re = 200$	43
Figura 27 – Componente v em diferentes instantes - $Re = 200$	44

Figura 28 – Velocidade medida na sonda no tempo - $Re = 200$	44
Figura 29 – Campo de pressão em diferentes instantes - $Re = 200$	45
Figura 30 – Pressão medida na sonda no tempo - $Re = 200$	45
Figura 31 – Coeficientes aerodinâmicos no tempo - $Re = 200$	46
Figura 32 – Vorticidade em diferentes instantes - $Re = 200$	46
Figura 33 – Velocidade em cada nó da malha lagrangiana.	47
Figura 34 – Componente u em diferentes instantes	49
Figura 35 – Componente v em diferentes instantes	50
Figura 36 – Velocidade medida na sonda no tempo para cilindro oscilando - $Re = 185$	50
Figura 37 – Pressão em diferentes instantes	51
Figura 38 – Pressão medida na sonda no tempo - $Re = 150$	52
Figura 39 – Coeficientes aerodinâmicos no tempo para cilindro oscilando - $Re = 185$	53
Figura 40 – Vorticidade em diferentes instantes para cilindro oscilando - $Re = 185$.	54

Lista de Tabelas

Tabela 1	–	Valores dos <i>ghost points</i> de u^*	23
Tabela 2	–	Valores dos <i>ghost points</i> para \mathbf{u} e χ	23
Tabela 3	–	Mudanças nos coeficientes do sistema linear para problema com entrada e saída.	23
Tabela 4	–	Algoritmo do Gradiente Conjugado Precondicionado	26
Tabela 5	–	Coeficientes aerodinâmicos para cilindro estacionário - $Re = 100$	35
Tabela 6	–	Comparação entre os números de Strouhal	47

Lista de abreviaturas e siglas

CFD	<i>Computacional Fluid Dynamics</i>
IBM	<i>Immersed Boundary Method</i>
VBM	<i>Virtual Boundary Method</i>
PVM	<i>Physical Virtual Model</i>
Re	Número de Reynolds
St	Número de Strouhal
C_d	Coeficiente de Arrasto
F_D	Força de Arrasto
C_l	Coeficiente de Sustentação
F_L	Força de Sustentação

Lista de símbolos

\mathbf{u}_∞	Velocidade do Escoamento não Perturbado
L_x	Comprimento do domínio na direção x
L_y	Comprimento do domínio na direção y
\mathbf{u}	Vetor velocidade do escoamento
\mathbf{U}_k	Vetor velocidade do ponto lagrangiano k
\mathbf{U}_k^d	Vetor velocidade desejada no ponto lagrangiano k
\mathbf{u}^*	Vetor velocidade intermediária do escoamento
u	Componente da velocidade na direção x
v	Componente da velocidade na direção y
w	Componente da velocidade na direção z
u^*	Componente da velocidade intermediária na direção x
v^*	Componente da velocidade intermediária na direção y
w^*	Componente da velocidade intermediária na direção z
p	Campo de pressão do escoamento
t	Tempo
Δt	Passo de tempo
χ	Pseudo-Pressão
\hat{n}	Vetor normal à superfície
\hat{t}	Vetor tangencial à superfície
δ	Função delta de Dirac
δ_h	Função delta de Dirac suavizada

Δx	Tamanho do elemento de malha na direção x
Δy	Tamanho do elemento de malha na direção y
n_x	Número de Elementos na direção x
n_y	Número de Elementos na direção y
\mathbf{x}	Coordenada Cartesiana
k	Ponto Lagrangiano
\mathbf{X}_k	Coordenada Cartesiana do ponto lagrangiano k
\mathbf{F}_k	Força em um ponto lagrangiano k
\mathbf{f}	Termo de Forçamento

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Contextualização	1
1.2	Objetivos do Trabalho	3
1.2.1	Objetivos Gerais	3
1.2.2	Objetivos Específicos	3
1.3	Organização do Trabalho	4
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
3	METODOLOGIA	8
3.1	Método da Projeção	8
3.2	Condições de Contorno	10
3.3	Método da Fronteira Imersa	11
3.3.1	Modelagem da Força	14
3.3.1.1	Método da Fronteira Virtual	14
3.3.1.2	Modelo Físico Virtual	15
3.3.1.3	Lei de Hooke	15
3.3.1.4	Método Direto	16
3.3.1.5	Método Utilizado	16
3.3.2	Construção da Função Delta de Dirac	17
3.4	Discretização em Diferenças Finitas	19
3.4.1	Equação para Velocidade-Tentativa	20
3.4.2	Equação da Pseudo-Pressão	21
3.4.3	Equação da Velocidade Real	21
3.4.4	Condições de Contorno para Problemas com Entrada e Saída	21
3.5	Upwinding e ENO	23
3.5.1	Hamilton-Jacobi ENO	24
3.6	Método dos Gradientes Conjugados	25
3.7	Descrição Geral do Programa	26

	4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	28
4.1		Cilindro Estático	30
4.2		Cilindro com Oscilação Vertical	48
	5	CONCLUSÃO	55
5.1		Conclusões	55
5.2		Trabalhos Futuros	56
		REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Escoamentos multifásicos estão presentes em diversas áreas da engenharia, sendo seu estudo de grande importância para o projeto de máquinas e desenvolvimento de novos processos. Algumas aplicações para esses escoamentos são escoamentos de superfície livre, tais como rios e mares, escoamento de emulsões, injeção de combustível em motores de combustão interna, entre outros. Uma das possíveis ferramentas para simulação de escoamentos multifásicos é o método de *Level Set*.

O método de *Level Set* consiste em determinar a distância dos pontos do domínio à curva de nível zero de uma função. Com as distâncias definidas, pode-se determinar os pontos dentro da curva como aqueles que possuem distância negativa e os pontos fora da curva possuindo distância positiva. A vantagem deste método é que as transformações topológicas acontecem naturalmente, sem a necessidade de lidar com malhas adaptativas e outros complicadores de técnicas tradicionais. Além disso, é possível acompanhar as formas mesmo que sua topologia mude, como divisão em partes.

Entretanto, vários objetos de estudo envolvem escoamentos multifásicos com fronteiras internas, algo que não é possível modelar apenas com o método de *Level Set*. Outro método foi desenvolvido para modelar justamente escoamentos monofásicos com fronteiras internas: o método da fronteira imersa. O método da fronteira imersa modela uma fronteira, móvel ou fixa, interna ao escoamento, podendo assumir qualquer formato. Com os dois métodos combinados, espera-se ser possível realizar simulações para analisar o efeito de fronteiras internas em escoamentos multifásicos, tal como um rio cujo fundo apresentar um formato ondulatório. Outro caso, por exemplo, é o estudo de cavitação em turbinas ou turbinas hidrocinéticas.

Tomando o caso específico de turbinas hidrocinéticas, a figura 1 mostra uma turbina parcialmente submersa em um rio. Neste caso, o rotor da turbina é uma fronteira imersa interagindo com o fluxo de água do rio. Mas a superfície livre também deve ser considerada, sendo utilizado o método de *Level Set*.



Figura 1 – Turbina hidrocínética parcialmente submersa

(JUNIOR et al., 2015)

Quanto a cavitação, a alta velocidade de rotação de hélices causa uma queda de pressão nas pontas das pás, se a pressão chegar a um nível inferior a pressão de vapor ocorre a formação de bolhas e cavitação, como representado na figura 2. Novamente, o rotor pode ser modelado como uma fronteira imersa enquanto o método de *Level Set* seria utilizado para capturar as bolhas de vapor.

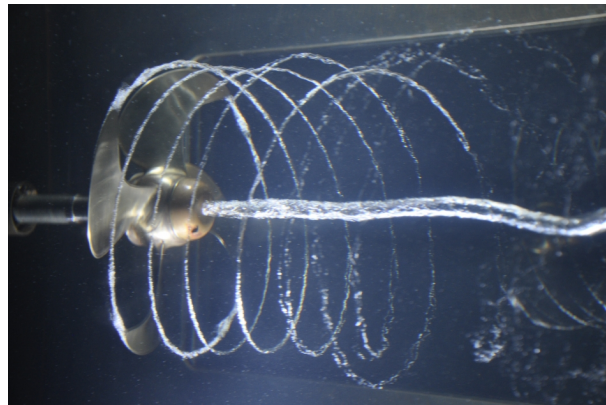


Figura 2 – Hélice sofrendo de cavitação

(TÚNEL. . . ,)

Neste contexto, o objetivo é implementar um método de fronteira imersa para simulação com fronteiras internas em escoamentos monofásicos incompressíveis. A implementação deve ser capaz de satisfazer a condição de aderência na superfície e possíveis movimentações da superfície.

Como caso de estudo, com o objetivo de validação da rotina com a implementação da fronteira imersa, será utilizado um problema de escoamento ao redor de um cilindro circular em um domínio com entrada e saída do escoamento (*inlet* e *outlet*). A figura 3 representa, em escala, o domínio físico, os elementos da simulação e as condições de contorno do caso em estudo. Para a obtenção de dados, colocou-se uma sonda no centro

do domínio para registrar as mudanças na velocidade e pressão em diversos instantes de tempo.

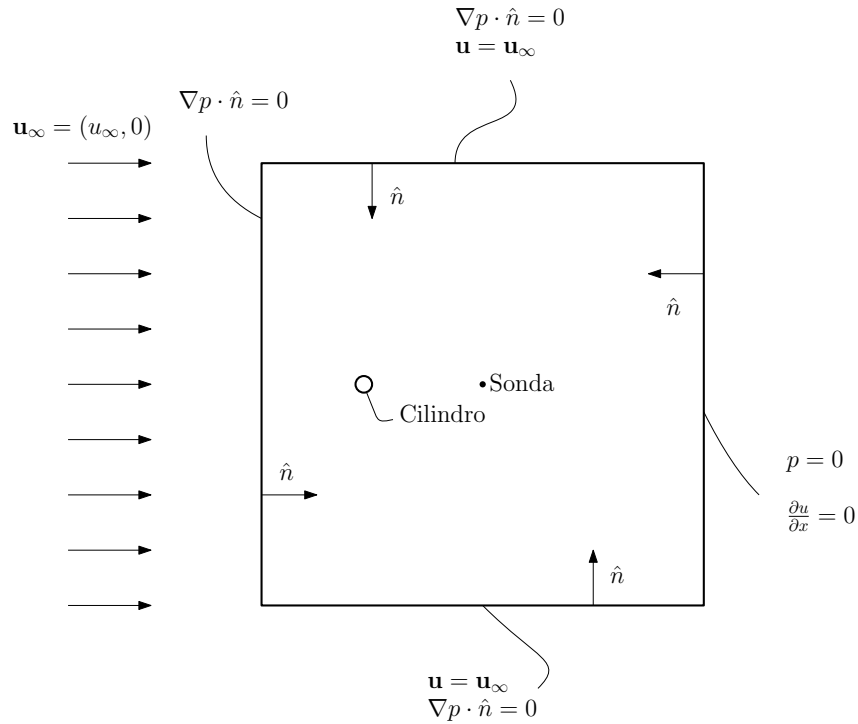


Figura 3 – Representação do escoamento ao redor do cilindro com condições de contorno

1.2 Objetivos do Trabalho

1.2.1 Objetivos Gerais

O objetivo deste projeto é implementar um método de fronteira imersa junto com o método de projeção para simulação de superfícies imersas em um fluido incompressível. Os resultados obtidos devem ser comparáveis aos observados por outros autores.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Estudar a formulação do método da fronteira imersa;
- Implementar o método da fronteira imersa em uma rotina utilizando o método de projeção para solução de Navier-Stokes;
- Aplicar a rotina desenvolvida para escoamento ao redor de um cilindro;
- Obter os campos de pressão e velocidade, linhas de corrente, vorticidade, coeficientes de arrasto e sustentação e número de Strouhal;

1.3 Organização do Trabalho

O capítulo 2 contém uma revisão dos principais estudos sobre o método de fronteira imersa. No capítulo 3 é descrita a metodologia utilizada pra resolver escoamentos incompressíveis e uma descrição do método da fronteira imersa com diferentes condições e os prós e contras de cada uma. Ainda no capítulo 3, é descrito método de discretização temporal e espacial assim como o método utilizado para a solução dos sistemas lineares. O capítulo 4 apresenta os resultados preliminares obtidos pela rotina e a discussão destes resultados. Por fim, o capítulo 5 contém as conclusões assim como trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O Método da Fronteira Imersa (*Immersed Boundary Method*) é um método desenvolvido por [Peskin \(1972\)](#) para estudar a interação entre o fluxo sanguíneo nas válvulas mitrais do coração. O método é computacional e baseia-se na simulação direta envolvendo a equação de Navier-Stokes. O modelo proposto por Peskin foi revolucionário no sentido de permitir a solução da equação de Navier-Stokes em uma malha regular com uma fronteira imersa, o que dá o nome ao método. Isto é feito substituindo a fronteira por uma força de campo definida na malha regular e calculada a partir da configuração e condições de contorno da fronteira.

Posteriormente, o método foi aperfeiçoado por [Peskin \(1977\)](#). Neste estudo, além das válvulas que já haviam sido simuladas, foi implementada a parede muscular do coração. A natureza topológica fixa da fronteira é explorada na resolução das equações não lineares, que definem implicitamente as forças de campo. Uma representação numérica mais eficiente da função delta de Dirac foi implementada, ajudando a suavizar os resultados e garantir simulações mais acuradas.

Uma versão com malha adaptativa foi desenvolvida por [Roma, Peskin e Berger \(1999\)](#). O modelo empregado neste estudo fazia um refinamento da malha na região próxima à fronteira imersa, obtendo assim uma acurácia melhor para o método. O refinamento da malha é feito dinamicamente de modo a acompanhar o movimento da fronteira. As equações que relacionam o escoamento de um fluido viscoso e incompressível junto com uma membrana elástica são resolvidas utilizando um método de projeção. A maior contribuição deste trabalho foi mostrar que não ocorre diferença significativa de resultados obtidos com a malha refinada localmente e com a malha uniforme mais fina.

O método de fronteira imersa original proposto por Peskin é um método explícito de primeira ordem. Sendo assim, [Lai e Peskin \(2000\)](#) propuseram um modelo para atingir a segunda ordem utilizando uma discretização de Crank-Nicolson e realizaram testes em escoamento ao redor de um cilindro. As forças de campo exercidas pela fronteira foram obtidas da lei de Hooke, considerando a fronteira como quasi-rígida, com elevada constante de rigidez. Entretanto, não se pode obter um método puro de segunda ordem, mas os resultados obtidos nas simulações se aproximam mais aos resultados experimentais do que os obtidos pelo método de primeira ordem.

Diversos estudos sobre a locomoção de animais aquáticos foram realizados pelo

Departamento de Matemática da *Tulane University* (FAUCI; PESKIN, 1988). Estes estudos utilizam o método da fronteira imersa para simular a movimentação de grandes animais como enguias, nematoides etc. E micro-organismos com flagelo tais como um espermatozoide. O corpo é representado por pontos móveis na malha Lagrangeana. A força de campo utilizada é definida como dependente de uma função de energia para a configuração dos pontos e do ponto em análise.

O método proposto considera uma fronteira elástica e deformável para calcular a força em função da forma da fronteira. Tendo isso em mente, Goldstein, Handler e Sirovich (1993) propuseram uma nova técnica para o método de Peskin para superfícies sólidas. A magnitude e direção da força de campo são escolhidas de forma que a velocidade do fluido seja nula na fronteira. Neste caso, a força é calculada a partir da teoria de controle considerando que o ponto da fronteira está ligado a uma “mola” e um “amortecedor”, ou seja, um termo de força associado a velocidade e outro termo relacionado ao deslocamento. O modelo então proposto ficou conhecido como fronteira virtual, ou *Virtual Boundary*.

Seguindo a mesma linha de Goldstein, Handler e Sirovich (1993), Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003) propuseram outra forma de cálculo para as forças e deram o nome *Physical Virtual Model* (PVM), ou modelo físico virtual. Este modelo propõem uma forma de cálculo das forças sem a necessidade de constantes previamente conhecidas, necessárias para o modelo *Virtual Boundary*. O campo de força Lagrangeano é dividido em quatro forças de campo distintas, sendo estas: força de aceleração, força de inércia, força viscosa e força de pressão. As forças são calculadas separadamente e só dependem do escoamento e das propriedades do fluido. As simulações feitas foram o escoamento ao redor do cilindro em diversos números de Reynolds e os resultados obtidos estão de acordo com simulações usando outros métodos. Outros trabalhos utilizando esta modelagem foram feitos com geometrias complexas (VEDOVOTO et al., 2007).

Kim, Kim e Choi (2001) propuseram um método direto para o cálculo da força de campo de modo a atender a condição de não deslizamento na fronteira. Entretanto, o modelo teve que ser modificado com a presença de fontes e sorvedouros nas regiões próximas à fronteira. A força de campo é calculada a partir da solução da equação de Navier-Stokes, a derivada temporal sendo calculada com a velocidade desejada no ponto de forçamento para satisfazer a condição de não escorregamento. Neste trabalho, utilizam-se interpolações lineares e bilineares para encontrar a velocidade no interior da fronteira de forma que a velocidade na superfície seja nula, assim não é utilizada a interpolação usando delta de Dirac proposta no método original. Ou seja, todas as propriedades ficam restritas a malha Eulerian onde é calculado o escoamento, sem propriedades interpoladas na malha Lagrangeana.

Uhlmann (2005) implementou o IBM para a simular escoamentos com partículas sólidas rígidas. Similar a Kim, Kim e Choi (2001), a força é calculada de maneira direta mas na própria fronteira. Ou seja, a velocidade de um ponto na fronteira é interpolada usando a função delta de Dirac e a força é calculada neste mesmo ponto a partir da

velocidade desejada que satisfaça a condição de não escorregamento e da velocidade calculada para forçamento nulo. Posteriormente, a força calculada no ponto da fronteira é espalhada para os pontos Eulerianos por meio da mesma função delta de Dirac. A simulação é validada realizando o escoamento ao redor de um cilindro, depois foi realizada a simulação utilizando partículas sólidas em movimento. Um resultado interessante das simulações mostra a interação entre as partículas, inclusive o toque, sendo interessante pois as partículas não estão de fato no escoamento, e sim forças de campo representativas.

Seguindo o trabalho de [Uhlmann \(2005\)](#), [Wang, Fan e Luo \(2008\)](#) realizaram simulações de partículas móveis com o forçamento direto sendo calculado diversas vezes para um mesmo passo de tempo, sendo chamado *Multi-Direct Forcing*. O método consiste em recalcular o forçamento a partir de um valor já calculado no instante anterior. Tal método obteve uma velocidade mais próxima da velocidade desejada para satisfazer a condição de não escorregamento quando comparado ao método de cálculo direto original.

3 METODOLOGIA

3.1 Método da Projeção

As equações governantes para a situação proposta são as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, com massa específica e viscosidade constantes. As equações descrevem a movimentação de uma partícula fluida a partir de condições impostas pelo escoamento. Suponha-se um campo de velocidade $\mathbf{u} = (u, v, w)$, em que u , v e w são as componentes de velocidade nos eixos cartesianos x , y e z , respectivamente, tem-se que as equações governantes são

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.2)$$

em que p é o campo de pressão, \mathbf{f} representa as forças de campo, essencial para o método de fronteira imersa utilizado, e Re é o número de Reynolds definido como $Re = \frac{U l_c}{\nu}$, sendo l_c o comprimento característico do escoamento, e ν a viscosidade cinemática. As equações (3.1) e (3.2) se encontram na forma adimensional.

A grande dificuldade associada em resolver as equações de Navier-Stokes está na ausência de uma equação explícita para a pressão, partindo-se do princípio de que as forças de campo \mathbf{f} são conhecidas. O método de projeção originalmente proposto por Kim e Moin (1985) contorna este problema resolvendo uma equação para uma velocidade intermediária $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*, w^*)$ sem o termo de pressão e sem a condição de incompressibilidade e depois projetando a velocidade intermediária em um campo solenoidal.

O método de projeção pode ser feito para uma discretização temporal de Euler explícito, assim pode-se entender melhor o método de forma simplificada antes de partir para esquemas mais complexos. A equação para a velocidade intermediária é representada por:

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{f}^n, \quad (3.3)$$

e a equação do campo de velocidade no próximo passo de tempo é dado por:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{n+1}. \quad (3.4)$$

O campo de pressão é obtido fazendo o divergente da equação (3.4) impondo a condição $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ resultando na seguinte relação:

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

A equação (3.5) tá possui a condição de incompressibilidade, sendo esta imposta em cada instante de tempo. Assim o método se mantém salvo de erros numéricos quanto à incompressibilidade.

Entretanto, aplicar o método de projeção utilizando Euler explícito resulta em uma aproximação de primeira ordem no tempo, além de condições de estabilidade relacionadas aos passos temporais. Como deseja-se obter um método de segunda ordem, utiliza-se a discretização temporal de Crank-Nickolson, avaliando no tempo $n + \frac{1}{2}$. A equação resultante aplicando a substituição da equação (3.4) tanto no termo referente á variação temporal quanto ao termo das tensões viscosas é

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2Re} \nabla^2 (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n) + \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

Vale lembrar que até o presente momento assumiu-se o valor do campo $\mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}}$ como conhecido, que será revisto futuramente na parte relacionada ao método da fronteira imersa, por enquanto será mantida essa suposição. O único termo então desconhecido, além da variável de interesse \mathbf{u}^* , no instante de tempo analisado é o termo convectivo $[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}}$, para estimá-lo utiliza-se uma extrapolação de Adam-Bashforth como explicitado na equação (3.7).

$$[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^n - \frac{1}{2}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^{n-1}. \quad (3.7)$$

Percebe-se que substituindo a equação (3.4) na equação (3.6) e fazendo $\Delta t \rightarrow 0$ não se obtém a equação de Navier-Stokes, pois o termo de pressão da equação resultante está no instante $n + 1$ e não no instante $n + \frac{1}{2}$, como assumido na discretização temporal. Para contornar este problema, utiliza-se uma variável auxiliar chamada de pseudo-pressão, χ . As equações (3.4) e (3.5) são modificadas, então, resultando em:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \chi^{n+1}, \quad (3.8)$$

$$\nabla^2 \chi^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}. \quad (3.9)$$

Resta agora desenvolver uma relação entre a variável de pressão $p^{n+\frac{1}{2}}$ e a pseudo pressão χ^{n+1} . Para isso basta substituir a variável \mathbf{u}^* definido pela equação (3.8) na

equação (3.6) e comparar os termos com a equação de Navier-Stokes. Obtém-se assim a seguinte equação

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}} - \nabla \chi^{n+1} + \frac{1}{2Re} \nabla^2 (\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) + \frac{1}{2Re} \nabla^2 (\Delta t \nabla \chi^{n+1}) + \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (3.10)$$

rearranjando

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla \left(\chi^{n+1} - \frac{\Delta t}{2Re} \nabla^2 \chi^{n+1} \right) - [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2Re} \nabla^2 (\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) + \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (3.11)$$

comparando o termo gradiente da equação (3.11) com o termo gradiente da equação de Navier-Stokes tem-se a relação

$$p^{n+\frac{1}{2}} = \chi^{n+1} - \frac{\Delta t}{2Re} \nabla^2 \chi^{n+1}, \quad (3.12)$$

ou utilizando a relação (3.9)

$$p^{n+\frac{1}{2}} = \chi^{n+1} - \frac{1}{2Re} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (3.13)$$

Tem-se, então, finalmente em uma relação para a pressão que retorna a equação de Navier-Stokes, mesmo quando $\Delta t \rightarrow 0$. Além disso, esta relação para pressão garante segunda ordem no tempo e é condizente com o método de Crank-Nicolson.

3.2 Condições de Contorno

Como agora as equações são resolvidas em torno de variáveis auxiliares, as condições de contorno devem ser aplicadas para as novas variáveis que serão resolvidas. As condições de contorno para pseudo-pressão são as mesma da pressão, resultando:

$$\begin{cases} \nabla \chi^{n+1} \cdot \hat{n} = 0, & \text{na entrada e nas paredes superior e inferior,} \\ \chi^{n+1} = 0, & \text{na saída.} \end{cases} \quad (3.14)$$

As condições de contorno para velocidade \mathbf{u}^* não são as mesmas para \mathbf{u} devido a relação (3.8). Entretanto, essa mesma relação também dá as condições de contorno para a velocidade. Lembrando que as condições na entrada e nas paredes superior e inferior são condições de valor fixo (Neumann) e as condições na saída são de derivada fixa (Dirichlet). Tomando a componente normal das superfícies:

$$\mathbf{u}^{n+1} \cdot \hat{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}^* \cdot \hat{n}|_{\partial\Omega} - \Delta t \nabla \chi^{n+1} \cdot \hat{n}|_{\partial\Omega}, \quad (3.15)$$

aplicando a condição (3.14)

$$\mathbf{u}^{n+1} \cdot \hat{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}^* \cdot \hat{n}|_{\partial\Omega}. \quad (3.16)$$

Nota-se que as condições de contorno podem ser aplicadas diretamente a \mathbf{u}^* quando o valor da velocidade é conhecido. Lembrando que as componentes normais da velocidade só possuem valor fixo na entrada e paredes inferiores e superiores, sendo a condição na saída de derivada fixa.

Na direção tangencial não ocorre a simplificação que ocorre para as componentes normais, desta forma as condições de contorno para \mathbf{u}^* são

$$\mathbf{u}^* \cdot \hat{t}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}^{n+1} \cdot \hat{t}|_{\partial\Omega} + \Delta t \nabla \chi^{n+1} \cdot \hat{t}|_{\partial\Omega}, \quad (3.17)$$

assim o valor fixado de \mathbf{u} deve ser modificado usando a variável de pseudo-pressão χ . Um problema surge dessa condição, visto que se necessita de \mathbf{u}^* para encontrar χ^{n+1} , não é possível aplicar diretamente a condição. Resolve-se esse problema usando novamente uma extrapolação de Adams-Bashforth mostrada por (3.18), como descrito por [Weinan, Liu et al. \(2003\)](#).

$$\chi^{n+1} \cong 2\chi^n - \chi^{n-1} \quad (3.18)$$

3.3 Método da Fronteira Imersa

O método da fronteira imersa, ou *immersed boundary method* (IBM), foi introduzido por [Peskin \(1972\)](#) para estudar escoamentos perto das válvulas do coração. Desde de sua primeira implementação, o método se mostrou útil para problemas envolvendo interação fluido-estrutura. O IBM é tanto uma formulação matemática quanto um método numérico. A formulação matemática conjuga elementos das descrições Eulerianas e Lagrangianas através de equações de interação, nas quais a função delta de Dirac exerce um papel fundamental ([PESKIN, 2002](#)).

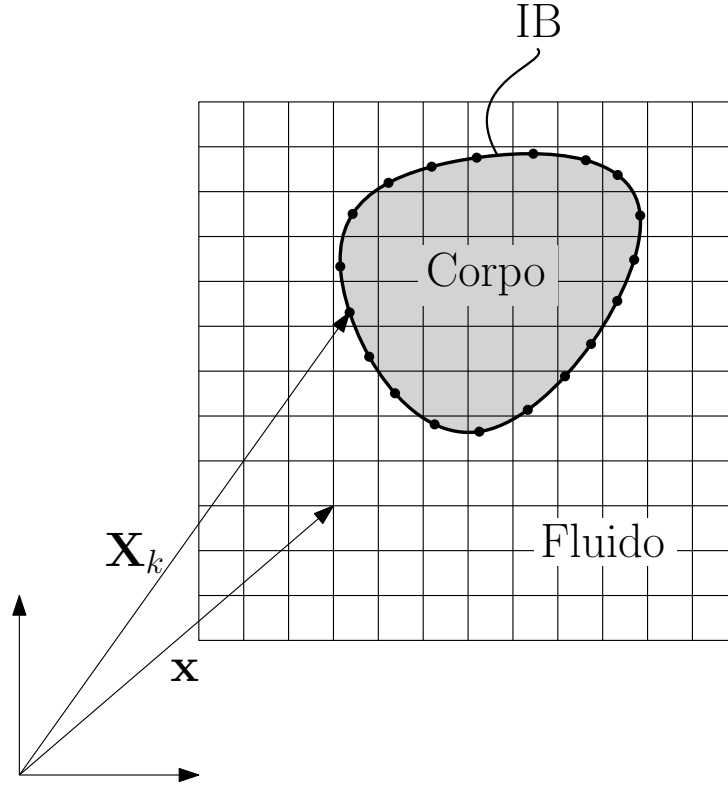


Figura 4 – Representação da malha cartesiana e do corpo imerso

As variáveis Eulerianas são definidas em uma malha cartesiana regular fixa, enquanto as variáveis Lagrangeanas são definidas em uma malha curvilínea que, em princípio, move-se livremente no domínio do escoamento. As equações de interação dependem de suavizações da função delta de Dirac, cuja construção será discutida na seção 3.3.2.

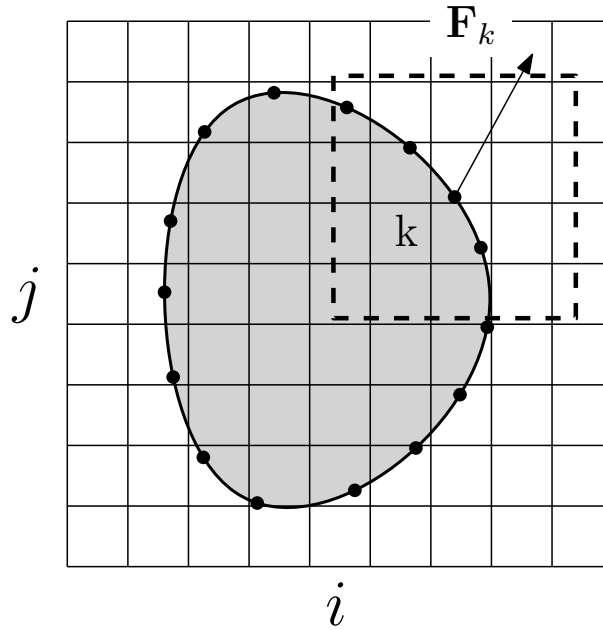


Figura 5 – Região de influência na malha Euleriana da força \mathbf{F}_k no ponto \mathbf{X}_k

Uma das características do IBM é que este método restringe as variáveis relacionadas às mecânicas dos fluidos na malha Euleriana, tornando a solução mais fácil em um

domínio regular. Ao mesmo tempo, o corpo imerso é descrito pela malha Lagrangiana, podendo se mover sem alterar os pontos nos quais as variáveis são calculadas. A interação fluido-estrutura é feita por meio de um termo de força pontual que depende da forma atual do corpo e das condições de não escorregamento na sua superfície. A modelagem matemática para um corpo elástico e incompressível é feita da seguinte forma (PESKIN, 2002)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \quad (3.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega_b} \mathbf{F}_k(\mathbf{X}_k, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) ds, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}_k}{\partial t} &= \mathbf{u}(\mathbf{X}_k, t) \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_k, t) = -\frac{\varphi E}{\varphi \mathbf{X}}, \quad (3.23)$$

em que \mathbf{x} representa um ponto Euleriano, \mathbf{X}_k representa um ponto Lagrangiano, ρ é a massa específica, p é a pressão, μ é a viscosidade dinâmica, \mathbf{f} é a força de campo do corpo na malha Euleriana, \mathbf{F}_k é a força de campo do corpo na malha Lagrangiana, δ é a função delta de Dirac, $E(\mathbf{X})$ é a função de energia na configuração \mathbf{X} . De forma geral, as variáveis escritas em caixa alta são avaliadas na malha Lagrangiana, o subscrito k indica em qual nó da malha estão sendo avaliadas, e as variáveis representadas por letras minúsculas são avaliadas na malha Euleriana.

A notação $\frac{\varphi E}{\varphi \mathbf{X}}$ representa uma derivada de Fréchet. Esta derivada é utilizada no cálculo variacional, área do cálculo que estuda funções e funcionais para encontrar valores de máximo e mínimo. Neste caso, por exemplo, isto pode ser usado para encontrar uma relação entre energia potencial de uma membrana e sua configuração no espaço. A derivada de Fréchet é uma transformação linear em espaços de Banach, sua definição formal pode ser encontrada em livros de análise tal como o escrito por Teixeira, Botelho e Pellegrino (2012). Neste trabalho não foi necessário utilizar essa derivada, porque a fronteira possui uma força artificialmente criada para simular uma superfície rígida com condição de não escorregamento.

Esta modelagem considera o corpo elástico e calcula a densidade de força a partir disto, assim deve-se substituir a equação (3.23) por outra relação para considerar um corpo rígido.

A equação (3.19) é a de Navier-Stokes em sua forma dimensional. A equação (3.20) é a da continuidade simplificada para escoamento incompressível, sendo uma condição para a equação (3.19), reduzindo o espaço de soluções para uma única solução. As equações (3.21) e (3.22) são as equações que relacionam as malha Euleriana com a Lagrangiana, sendo que (3.21) representa um “espalhamento” da força da malha Lagrangiana para a Euleriana e (3.22) representa a interpolação de velocidade da malha Euleriana para a Lagrangiana. As integrais de 3.21 e 3.22 são definidas sobre a fronteira e sobre o domínio inteiro respectivamente. A equação (3.23) serve como equação de fechamento para calcular a densidade de força necessária para a condição de um corpo elástico no meio viscoso. Tem-se então um sistema fechado de equações.

3.3.1 Modelagem da Força

3.3.1.1 Método da Fronteira Virtual

A modelagem do termo de densidade de força mostrado na equação (3.23) feito por Peskin (1972) considera o corpo como sendo elástico e se movendo junto com o escoamento. Entretanto desejam-se aplicar outras condições, como corpo rígido estacionário ou em movimento imposto. Assim sendo, necessita-se da modelagem de outras equações de fechamento para o cálculo da força.

Goldstein, Handler e Sirovich (1993) modelaram o termo de força para um corpo rígido com condição de não escorregamento se baseando na teoria de controle linear, criando o método fronteira virtual (*virtual boundary method*). Este método baseia-se em calcular o forçamento partindo da diferença de velocidade entre a fronteira e o fluido no mesmo ponto. A força é então calculada segundo a relação,

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_k, t) = \alpha \int_0^t [\mathbf{U}_k(\mathbf{X}_k, t') - \mathbf{U}^d(\mathbf{X}_k, t')] dt' + \beta [\mathbf{U}_k(\mathbf{X}_k, t) - \mathbf{U}^d(\mathbf{X}_k, t)], \quad (3.24)$$

em que α e β são constantes negativas, $\mathbf{U}_k(\mathbf{X}_k, t)$ é a velocidade do fluido em um ponto Lagrangiano \mathbf{X}_k no instante t interpolado pela função delta de Dirac, e $\mathbf{U}^d(\mathbf{X}_k, t)$ é a velocidade do ponto Lagrangiano \mathbf{X}_k no instante t .

Ao aplicar a equação (3.24) na equação (3.1) e comparando somente com o termo de variação local, ignorando os outros termos, tem-se a equação de velocidade para um oscilador harmônico amortecido com constante de rigidez α e constante de amortecimento β , daí a comparação entre uma mola e um amortecedor.

A grande dificuldade deste modelo está em determinar as constantes α e β . Valores distintos das constantes resultam em resultados diferentes, além de condições de estabilidade diferentes.

3.3.1.2 Modelo Físico Virtual

O modelo físico virtual proposto por [Silva, Silveira-Neto e Damasceno \(2003\)](#), consiste em separar o termo de força \mathbf{F}_k em quatro outros termos expressos por

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_k) = \mathbf{F}_{k_a}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{F}_{k_i}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{F}_{k_v}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{F}_{k_p}(\mathbf{X}_k), \quad (3.25)$$

em que os termos \mathbf{F}_{k_a} é a força de aceleração, \mathbf{F}_{k_i} é a força de inércia, \mathbf{F}_{k_v} é a força viscosa, \mathbf{F}_{k_p} é a força de pressão. Estas componentes são calculadas da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{k_a}(\mathbf{X}_k) = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}_k), \quad (3.26)$$

$$\mathbf{F}_{k_i}(\mathbf{X}_k) = \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{X}_k), \quad (3.27)$$

$$\mathbf{F}_{k_v}(\mathbf{X}_k) = -\mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{X}_k), \quad (3.28)$$

$$\mathbf{F}_{k_p}(\mathbf{X}_k) = \nabla p(\mathbf{X}_k). \quad (3.29)$$

Os termos descritos pelas equações (3.26), (3.27), (3.28), e (3.29) devem ser calculados na fronteira usando o campo de velocidade \mathbf{u} e campo de pressão p . Estas equações também devem levar em consideração que a velocidade do fluido é igual à da fronteira em um ponto, garantindo a condição de não escorregamento. Como os pontos da fronteira não se encaixam nos pontos da malha, deve-se utilizar uma interpolação para determinar as propriedades nesses pontos.

3.3.1.3 Lei de Hooke

[Lai e Peskin \(2000\)](#) utilizaram a lei de Hooke para calcular a densidade de força

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_k) = \kappa(\mathbf{X}_k^e - \mathbf{X}_k), \quad (3.30)$$

em que κ é uma constante positiva tal que $\kappa \gg 1$. Tal relação pode ser interpretada como uma mola de rigidez κ que liga o ponto \mathbf{X}_k a um ponto de equilíbrio fixo \mathbf{X}_k^e . Assim, se o ponto da fronteira se deslocar da posição desejada, a força da mola puxa o ponto de volta à posição desejada, por este motivo a constante deve ser alta. Percebe-se que este método é similar ao VBM, apenas um caso mais específico da relação (3.24) com $\beta = 0$.

3.3.1.4 Método Direto

Kim, Kim e Choi (2001) e Uhlmann (2005) utilizaram um método direto para obter a densidade de força. Este foi o método utilizado neste trabalho para obter o forçamento. O termo de força é obtido diretamente das equações de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{rhs}, \\ \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \mathbf{rhs}^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

em que

$$\mathbf{rhs} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.32)$$

na malha lagrangiana:

$$\mathbf{F}_k^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{X}_k) = \frac{\mathbf{U}_k^{n+1} - \mathbf{U}_k^n}{\Delta t} - \mathbf{RHS}_k^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{U}_k^d - \mathbf{U}_k^n}{\Delta t} - \mathbf{RHS}_k^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

O termo \mathbf{U}_k^d na equação (3.33) representa a velocidade desejada no ponto lagrangiano k , isto permite satisfazer a condição de não escorregamento nesses pontos para quais que valores de velocidade.

A dificuldade desta abordagem está relacionada ao termo $\mathbf{RHS}_k^{n+\frac{1}{2}}$, já que este se encontra implícito. Os autores deste método utilizaram o método de Runge-Kutta de terceira ordem para solucionar este problema. A solução adotada no presente trabalho foi estimar este termo utilizando uma extrapolação de Adams-Bashforth.

3.3.1.5 Método Utilizado

Neste trabalho, foi utilizado um método para avaliar os termos de força derivado do método direto. A abordagem consiste em utilizar a equação (3.33) com uma extrapolação para o termo $\mathbf{RHS}^{n+\frac{1}{2}}$. Para isso, escolheu-se extrapolar cada termo de \mathbf{rhs} separadamente, para depois calcular seu valor e realizar o transporte para a malha lagrangiana, de forma que

$$\mathbf{rhs}^{n+\frac{1}{2}} = -[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}} - \nabla p^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (3.34)$$

Os termos $\nabla^2 \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ e $\nabla p^{n+\frac{1}{2}}$ devem ser calculados a partir das extrapolações da velocidade e da pressão e depois tirados o laplaciano e gradiente, respectivamente. O termo $[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}}$ deve ser calculado a partir da extrapolação do próprio termo em instantes anteriores, de modo semelhante ao utilizado no método de projeção.

$$[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^n - \frac{1}{2}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^{n-1}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\mathbf{u}^n - \frac{1}{2}\mathbf{u}^{n-1}, \quad (3.36)$$

$$p^{n+\frac{1}{2}} = 2p^{n-\frac{1}{2}} - p^{n-\frac{3}{2}}. \quad (3.37)$$

3.3.2 Construção da Função Delta de Dirac

A função Delta de Dirac é fundamental para o método pois transporta as propriedades de uma malha para a outra, sendo que funções construídas de formas distintas podem gerar resultados distintos além de solução não suave. Esta é a primeira vez que assumimos um caso bidimensional, até o momento toda formulação serve para um espaço tridimensional genérico. A função deve obedecer a postulados cujas funções serão discutidas a seguir.

Primeiramente, assume-se que a função delta suavizada δ_h para um caso bidimensional é dada pelo produto de funções com uma variável que escalam com o tamanho h de um elemento da malha (PESKIN, 2002):

$$\delta_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^2} d\left(\frac{x}{h}\right) d\left(\frac{y}{h}\right) \quad (3.38)$$

em que x e y são as componentes de \mathbf{x} no espaço cartesiano.

Define-se agora os demais postulados a partir de $d(r)$, sendo r qualquer uma das variáveis $\frac{x}{h}$ ou $\frac{y}{h}$. Os postulados são os seguintes:

$$d(r) \text{ é contínua para todo valor de } r \text{ real}, \quad (3.39)$$

$$d(r) = 0 \text{ para } |r| \geq 2, \quad (3.40)$$

$$\sum_{j \text{ par}} d(r-j) = \sum_{j \text{ impar}} d(r-j) = \frac{1}{2}, \text{ para todo } r \text{ real}, \quad (3.41)$$

$$\sum_j (r-j) d(r-j) = 0 \text{ para todo } r \text{ real}, \quad (3.42)$$

$$\sum_j (d(r-j))^2 = C \text{ para todo } r \text{ real}. \quad (3.43)$$

A simplificação feita em (3.38) não é necessária mas é uma boa simplificação por tirar a bidimensionalidade da função. Além disso, a normalização por h retira esta das outras formulações e ainda mantém a propriedade de consistência em que se $h \rightarrow 0$ então $\delta_h \rightarrow \delta$.

O postulado (3.39) evita que saltos de velocidade ou de força quando as propriedades são passadas da malha Lagrangiana para a Euleriana. O postulado (3.40) é feito

para melhorar a eficiência computacional, de modo que um ponto lagrangiano não precisa interagir com todos os pontos eulerianos, sendo esta interação limitada aos pontos mais próximos.

Uma consequência direta de (3.41) é

$$\sum_j d(r-j) = 1 \text{ para todo } r \text{ real,} \quad (3.44)$$

que é similar a versão discreta da propriedade integral da função delta de Dirac. Da mesma forma, o postulado (3.42) recupera outra propriedade de filtragem.

Resta agora encontrar $d(r)$ e assim encontrar δ_h . Para isso aplica-se os postulados com r limitado no intervalo $[0, 1]$ e escrever em forma explícita:

$$d(r-2) + d(r) = \frac{1}{2}, \quad (3.45)$$

$$d(r-1) + d(r+1) = \frac{1}{2}, \quad (3.46)$$

$$2d(r-2) + d(r-1) - d(r+1) = r, \quad (3.47)$$

$$(d(r-2))^2 + (d(r-1))^2 + (d(r))^2 + (d(r+1))^2 = C. \quad (3.48)$$

Resolvendo o sistema tanto para o intervalo $[0, 1]$ quanto para os intervalos $[1, 2]$, $[-2, -1]$ e $[-1, 0]$ obtém-se a função

$$d(r) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2} \right), & 0 \leq |r| < 1 \\ \frac{1}{8} \left(5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2} \right), & 1 \leq |r| < 2 \\ 0, & 2 \leq |r|. \end{cases} \quad (3.49)$$

Esta função apresenta características interessantes além das postuladas, tais como simetria em relação a $r = 0$ e possui primeira derivada contínua.

Outra função, representada pela equação (3.50) é utilizada com mesmo objetivo, mas não obedece todos os postulados, entretanto ganha na simplicidade. Mesmo assim obteve-se por utilizar a função (3.49).

$$\tilde{d}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi r}{2} \right) \right), & |r| \leq 2 \\ 0, & 2 \leq |r|. \end{cases} \quad (3.50)$$

3.4 Discretização em Diferenças Finitas

Utilizou-se neste trabalho uma malha defasada como a utilizada por [Kim e Moin \(1985\)](#) para o caso bidimensional. Nesta malha, as propriedades são avaliadas em diferentes pontos, isto retira as flutuações não físicas do uso de uma malha convencional e utiliza estêncis menores. O domínio é dividido em quadriláteros de forma que as propriedades escalares p e χ são avaliadas no centro da célula, e as grandezas vetoriais da velocidade u , v , u^* , v^* e as grandezas do termo de força f_1 , f_2 são avaliados nos centros das arestas destes quadriláteros. A figura 6 mostra uma representação da malha defasada próxima a um ponto (i, j) , em que é possível observar as posições das grandezas.

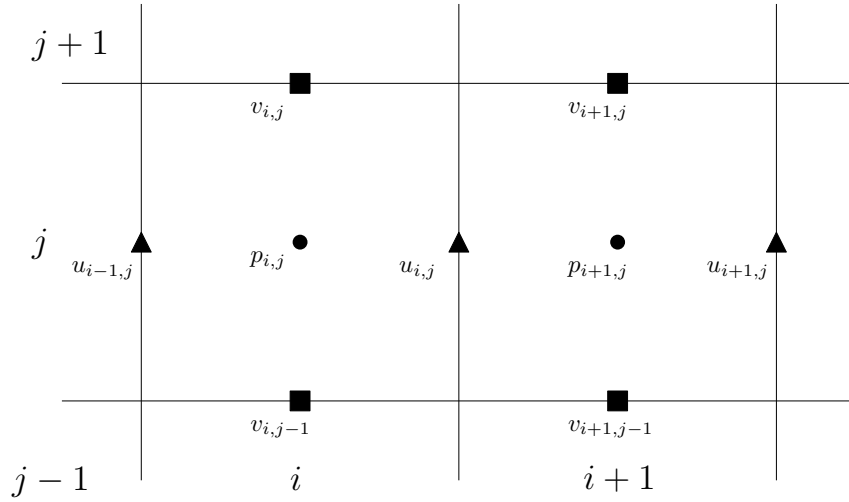


Figura 6 – Representação de uma malha defasada bidimensional

O objetivo desta discretização é transformar as equações (3.6) e (3.9) em sistemas lineares do tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sendo A a matriz dos coeficientes, \mathbf{x} o vetor das variáveis, e \mathbf{b} o vetor resposta. Entretanto, a matriz A para estas equações é esparsa, sendo assim, pode-se escrever o sistema na forma de estêncil, como mostrado pela equação (3.51), como feito por [Ferziger e Peric \(2012\)](#).

$$a_{ij}x_{i-1j} + b_{ij}x_{ij-1} + c_{ij}x_{ij} + d_{ij}x_{i+1j} + e_{ij}x_{ij+1} = f_{ij} \quad (3.51)$$

Desta forma, tem-se três sistemas lineares distintos para as variáveis u^* , v^* e χ a cada passo de tempo. Os sistemas são resolvidos utilizando um algoritmo dos gradientes conjugados com condicionamento do tipo SSOR.

As primeiras e segundas derivadas discretizadas para uma variável genérica ψ são calculadas conforme explicitado nas equações (3.52) e (3.53) respectivamente. As derivadas discretas são centradas, assim se obtém aproximações com ordem $O(\Delta x^2)$.

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{ij} = \frac{\psi_{i+1j} - \psi_{i-1j}}{2\Delta x} \quad (3.52)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{ij} = \frac{\psi_{i+1j} - 2\psi_{ij} + \psi_{i-1j}}{\Delta x^2} \quad (3.53)$$

As derivadas na outra direção podem ser determinadas de forma análoga. Deve-se levar em consideração o fato de que as propriedades não são avaliadas no mesmo ponto. Assim, às vezes, deseja-se obter a derivada de uma propriedade no ponto de outra descrita por:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{\psi_{i+1j} - \psi_{ij}}{\Delta x}, \quad (3.54)$$

sendo uma derivada centrada, já que está definida entre os pontos (i, j) e $(i+1, j)$.

3.4.1 Equação para Velocidade-Tentativa

Aplicam-se agora as aproximações para as derivadas a equação (3.6). Aqui é feita somente na direção x , as discretizações para a outra componente é feita de forma análoga. Reescrevendo a equação (3.6)

$$u^* - \frac{\Delta t}{2Re} \nabla^2 u^* = u^n - \Delta t [\mathbf{u} \cdot \nabla u]^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2Re} \nabla^2 u^n + \Delta t f_1^{n+\frac{1}{2}}. \quad (3.55)$$

Nota-se que o lado direito da equação (3.55) corresponde ao termo f_{ij} da equação de diferenças finitas (3.51). Vale lembrar que todos os termos são calculados de forma explícita. A discretização de cada termo é dada conforme a seguir:

$$\nabla^2 u^n = \frac{u_{i+1j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n}{\Delta y^2}, \quad (3.56)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla u^n = u_{ij}^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + \bar{v}^n \frac{\partial u^n}{\partial y}, \quad (3.57)$$

$$\bar{v}^n = \frac{v_{ij}^n + v_{i+1j}^n + v_{ij-1}^n + v_{i+1j-1}^n}{4}, \quad (3.58)$$

em que \bar{v} é obtida por interpolação no ponto u_{ij} utilizando os pontos mais próximos de v . Nesta condição foi utilizado um esquema de *upwinding* ENO, modificando-se os pontos utilizados para calcular a derivada. A explicação detalhada deste esquema se encontra na seção 3.5.

3.4.2 Equação da Pseudo-Pressão

O sistema linear da equação da variável Pseudo-Pressão é dada pela discretização da equação (3.9):

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \Big|_{ij} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \Big|_{ij} = \frac{1}{\Delta t} [\nabla \cdot \mathbf{u}^*]_{ij}, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \Big|_{ij} = \frac{\chi_{i+1j}^{n+1} - 2\chi_{ij}^{n+1} + \chi_{i-1j}^{n+1}}{\Delta x^2}, \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \Big|_{ij} = \frac{\chi_{ij+1}^{n+1} - 2\chi_{ij}^{n+1} + \chi_{ij-1}^{n+1}}{\Delta y^2}, \quad (3.61)$$

$$[\nabla \cdot \mathbf{u}^*]_{ij} = \frac{u_{ij}^* - u_{i-1j}^*}{\Delta x} + \frac{v_{ij}^* - v_{ij-1}^*}{\Delta y}. \quad (3.62)$$

Novamente, nota-se que o termo do lado direito da equação (3.59) não possui nenhum termo em função de χ , assim, é o termo f_{ij} da equação de diferenças finitas (3.51). Vale lembrar que as derivadas de \mathbf{u}^* na equação (3.62) são centradas já que o ponto onde se toma a derivada (nó de χ) se encontra entre os pontos u_{ij}^* e u_{i-1j}^* , por exemplo, garantindo assim segunda ordem conforme (3.54).

3.4.3 Equação da Velocidade Real

Resta agora discretizar a equação (3.8), assumindo os que os valores para \mathbf{u}^* e χ^{n+1} . A discretização é dada como

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^* - \Delta t \frac{\chi_{i+1j}^{n+1} - \chi_{ij}^{n+1}}{\Delta x}, \quad (3.63)$$

$$v_{ij}^{n+1} = v_{ij}^* - \Delta t \frac{\chi_{ij+1}^{n+1} - \chi_{ij}^{n+1}}{\Delta y}. \quad (3.64)$$

Lembrando novamente que, como no caso anterior, as derivadas de χ são computadas nas arestas de cada elemento da malha, sendo assim centradas e de segunda ordem.

3.4.4 Condições de Contorno para Problemas com Entrada e Saída

As condições de contorno do problema são aplicadas através do uso de *ghost points*, que são pontos “fantasmas” localizados fora do domínio. Estes pontos são organizados na mesma forma que o restante da malha, sendo seus valores calculados através das

condições de contorno implementadas. No caso em que os pontos da malha se encontram na superfície, o uso de *ghost points* não é necessário caso a condição utilizada seja de valor dado (Dirichlet). Nesta seção são mostradas as condições de contorno para as paredes, entrada e saída. No caso em que nenhum ponto se encontra na fronteira do domínio, o valor é estimado utilizando uma interpolação linear entre um ponto dentro do domínio e um *ghost point*.

Para o caso da componente normal na fronteira de entrada no domínio, a velocidade nos nós que coincidem com a parede é dada pela equação (3.16). Para a componente tangencial da velocidade na fronteira de entrada no domínio é necessário utilizar a relação (3.15) com a interpolação linear. Assim tem-se

$$\frac{v_{0j} + v_{1j}}{2} = 0 \Rightarrow v_{0j}^* = 2 \left(0 + \Delta t \frac{\chi_{0j+1}^{n+1} - \chi_{0j}^{n+1}}{\Delta y} \right) - v_{1j}^*. \quad (3.65)$$

Para as paredes superior e inferior, escolhe-se uma condição de velocidade de Dirichlet igual a condição de entrada. Assim, a condição de contorno para as componentes normais pode ser aplicada diretamente, enquanto a condição de contorno das superfícies inferior e superior é dada por

$$\frac{u_{i0} + u_{i1}}{2} = 1 \Rightarrow u_{i0}^* = 2 \left(1 + \Delta t \frac{\chi_{i+10}^{n+1} - \chi_{i0}^{n+1}}{\Delta x} \right) - u_{i1}^*, \quad (3.66)$$

$$\frac{u_{iny} + u_{iny+1}}{2} = 1 \Rightarrow u_{iny+1}^* = 2 \left(1 + \Delta t \frac{\chi_{i+1ny}^{n+1} - \chi_{iny}^{n+1}}{\Delta x} \right) - u_{iny}^*, \quad (3.67)$$

Nota-se que tanto u_{iny+1}^* quanto u_{i0}^* dependem de u_{iny}^* e u_{i1}^* , entretanto, os parâmetros e_{iny} e b_{i1} devem multiplicar apenas u_{iny+1}^* e u_{i0}^* , enquanto o parâmetro os c_{iny} e c_{i1} devem multiplicar apenas u_{iny}^* e u_{i1}^* . Deste modo, é necessário modificar os parâmetros do sistema linear,

$$c_{iny} \Leftarrow c_{iny} - e_{iny}, \quad (3.68)$$

$$c_{iny} \Leftarrow c_{iny} - b_{iny}. \quad (3.69)$$

O valor dos *ghost points* da variável u^* para todas as fronteiras do domínio é definida na tabela 1. Os valores para a variável v^* podem ser obtidos de forma análoga.

Tabela 1 – Valores dos *ghost points* de u^*

Fronteira	Valor dos ghosts u^*
$x = 0$	$u_{0,j}^* = 1$
$x = L_x$	$u_{nx+1,j}^* = u_{nx-1,j}^*$
$y = 0$	$u_{i,0}^* = 2 \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[2 \left(\chi_{i+1,0}^n - \chi_{i,0}^n \right) - \left(\chi_{i+1,0}^{n-1} - \chi_{i,0}^{n-1} \right) \right] \right\}$
$y = L_y$	$u_{i,ny+1}^* = 2 \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[2 \left(\chi_{i+1,ny}^n - \chi_{i,ny}^n \right) - \left(\chi_{i+1,ny}^{n-1} - \chi_{i,ny}^{n-1} \right) \right] \right\}$

A tabela 2 apresenta os valores para os *ghost points* para \mathbf{u} e χ . Os valores de u e v são obtidos a partir das condições impostas e os valores para χ são obtidos a partir da condição (3.14).

Tabela 2 – Valores dos *ghost points* para \mathbf{u} e χ

Fronteira	Valor dos ghosts de u	Valor dos ghosts de v	valor dos ghosts de χ
$x = 0$	$u_{0,j} = 1$	$v_{0,j} = -v_{1,j}$	$\chi_{0,j} = \chi_{1,j}$
$x = L_x$	$u_{nx+1,j} = u_{nx-1,j}$	$v_{nx+1,j} = -v_{nx,j}$	$\chi_{nx+1,j} = -\chi_{nx,j}$
$y = 0$	$u_{i,0} = 2 - u_{i,1}$	$v_{i,0} = -v_{i,1}$	$\chi_{i,0} = \chi_{i,1}$
$y = L_y$	$u_{i,ny+1} = 2 - u_{i,ny}$	$v_{i,ny+1} = -v_{i,ny}$	$\chi_{i,ny+1} = \chi_{i,ny}$

As alterações feitas nos coeficientes do sistema linear seguindo os valores aplicados aos *ghost points* são mostradas na tabela 3 para todas as variáveis obtidas pela solução dos sistemas lineares.

Tabela 3 – Mudanças nos coeficientes do sistema linear para problema com entrada e saída.

Fronteira	\mathbf{u}^*	\mathbf{v}^*	χ
$x = 0$	—	$c \leftarrow c - a$	$c \leftarrow c + a$ $a \leftarrow 0$
$x = L_x$	$a \leftarrow a + d$ $d \leftarrow 0$	$c \leftarrow c - d$	$c \leftarrow c - d$ $d \leftarrow 0$
$y = 0$	$c \leftarrow c - b$	—	$c \leftarrow c + b$ $b \leftarrow 0$
$y = L_y$	$c \leftarrow c - e$	—	$c \leftarrow c + e$ $e \leftarrow 0$

3.5 Upwinding e ENO

Os esquemas de *upwinding* são métodos de utilizados para resolver equações diferenciais parciais de forma a simular a direção de propagação da informação em um escoamento. Os métodos são baseados na direção da velocidade de propagação.

Para ilustrar o método, considera-se a equação da advecção unidimensional discretizada

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + u_i^n (\phi_x)_i^n = 0, \quad (3.70)$$

em que $(\phi_x)_i^n$ representa a derivada da propriedade ϕ na direção x avaliada no ponto x_i . Se $u_i > 0$, então a informação de ϕ está se propagando da esquerda para a direita, então deve-se avaliar os valores a esquerda de x_i para determinar qual valor de ϕ vai estar no ponto x_i ao final do passo de tempo. Analogamente, se $u_i < 0$, a informação está se propagando da direita para a esquerda, e deve-se avaliar os pontos a direita de x_i . Utilizando a notação ϕ_x^+ para denotar a derivada espacial de ϕ avaliada utilizando pontos a direita de x_i e ϕ_x^- para denotar a derivada espacial de ϕ avaliada utilizando pontos a esquerda de x_i . Nota-se então que ϕ_x^- deve ser utilizada no caso $u_i > 0$, enquanto ϕ_x^+ não seria uma boa aproximação por não conter a informação a esquerda de x_i , de onde vem a informação sobre ϕ .

Em resumo, define-se o *upwinding* da seguinte forma. Se $u_i > 0$, aproxima-se a derivada ϕ_x por ϕ_x^- e, se $u_i < 0$, aproxima-se a derivada ϕ_x por ϕ_x^+ . Caso $u_i = 0$, o termo $u_i(\phi_x)_i$ é nulo independente do valor de ϕ_x , não necessitando de aproximação.

3.5.1 Hamilton-Jacobi ENO

[Harten et al. \(1986\)](#) propuseram um método de interpolação polinomial para a solução numérica de funções conservativas, o esquema *essentially non-oscillatory* (ENO). A ideia básica é computar as funções utilizando o polinômio mais suave possível. A implementação desta ideia foi melhorada com a utilização de uma tabela de diferenças divididas para encontrar diretamente a função.

Como descrito por [Osher, Fedkiw e Piechor \(2004\)](#), desejamos encontrar o polinômio interpolador mais suave para ϕ e depois derivar para obter ϕ_x . Para isso, vamos utilizar um polinômio de Newton, definindo a diferença dividida de ordem 0 de ϕ definidas nos nós da malhada como

$$D_i^0 \phi = \phi_i \quad (3.71)$$

para cada nó i . A primeira diferença dividida de ϕ é definida entre nós como

$$D_{i+1/2}^1 \phi = \frac{D_{i+1}^0 \phi - D_i^0 \phi}{\Delta x}. \quad (3.72)$$

As segundas diferenças divididas são definidas entre os nós da malha como

$$D_i^2 \phi = \frac{D_{i+1/2}^1 \phi - D_{i-1/2}^1 \phi}{2\Delta x}. \quad (3.73)$$

As diferenças divididas são utilizadas para construir um polinômio da forma

$$\phi(x) = Q_0(x) + Q_1(x) + Q_2(x) \quad (3.74)$$

que pode ser derivado e avaliado em x_i para obter $(\phi_x^-)_i$ e $(\phi_x^+)_i$. Ou seja, utilizando

$$\phi_x(x_i) = Q'_1(x_i) + Q'_2(x_i) \quad (3.75)$$

para definir $(\phi_x^-)_i$ e $(\phi_x^+)_i$. Note que a constante $Q_0(x)$ se anula quando derivado.

Para encontrar ϕ_x^- começamos com $k = i - 1$, e para encontrar ϕ_x^+ começamos com $k = i$. Assim definimos

$$Q_1(x) = \left(D_{k+1/2}^1\phi\right)(x - x_i), \quad (3.76)$$

isso implica

$$Q'_1(x_i) = D_{k+1/2}^1\phi, \quad (3.77)$$

mostrando que contribuição de $Q'_1(x_i)$ na equação (3.75) é a diferença regressiva no caso de ϕ_x^- e diferença progressiva no caso de ϕ_x^+ . Em outras palavras, o polinômio de primeira ordem obtido é exatamente *upwinding* de primeira ordem. A segunda ordem é obtida por meio da inclusão do termo $Q'_2(x_i)$, a terceira ordem poderia ser obtida utilizando a inclusão de um terceiro termo $Q'_3(x_i)$.

Analisando a tabela de diferenças divididas, nota-se que $D_{k+1/2}^1$ foi escolhido para acurácia de segunda ordem, tem-se duas opções para a correção de segunda ordem. Pode-se usar o ponto a esquerda e usar $D_k^2\phi$, ou pode-se utilizar o ponto a direita e usar $D_{k+1}^2\phi$. A grande observação é que dados que variam menos tendem a produzir números menores na tabela de diferenças divididas. Comparando $|D_k^2\phi|$ e $|D_{k+1}^2\phi|$ indica qual dos polinômios interpoladores tem maior variação. Deseja-se evitar interpolar em regiões de grandes variações ou descontinuidades, visto que estes causam um *overshooting* da função interpoladora. Assim, se $|D_k^2\phi| < |D_{k+1}^2\phi|$, fazemos $c = D_k^2\phi$, caso contrário, fazemos $c = D_{k+1}^2\phi$. Assim definimos

$$Q_2(x) = c(x - x_k)(x - x_{k+1}), \quad (3.78)$$

então

$$Q'_2(x_i) = c(2(i - k) - 1)\Delta x. \quad (3.79)$$

Os mesmos autores desenvolveram um esquema de maior ordem a partir do ENO consistindo em pesos para as diferentes interpolações, o esquema *Weighted Essentially Non-Oscillatory* (WENO).

3.6 Método dos Gradientes Conjugados

O método utilizado para a solução dos sistemas lineares foi o gradiente conjugado com condicionamento em SSOR. O método dos gradientes conjugados pode ser descrito como um método iterativo para resolver sistemas lineares do tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, em que são feitas sucessivas direções de busca ortogonais entre si com relação a A . Ou seja, o produto interno $\langle \mathbf{d}^i, \mathbf{d}^{i+1} \rangle_A = 0$ (SHEWCHUK et al., 1994).

O condicionamento é feito utilizando uma matriz auxiliar M que se aproxima de A mas é mais fácil de se inverter. Então resolve-se o sistema indiretamente fazendo $M^{-1}A\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b}$. Neste caso se utiliza de um o método SSOR para encontrar a matriz condicionadora M , como explicitado por [Saad \(2003\)](#).

Os passos do algoritmo são mostrados na tabela 4, iniciando com $i = 0$ e valor inicial arbitrário \mathbf{x}^0 . Repetem-se os passos 4-8 após a primeira iteração até o critério de convergência estabelecido do resíduo \mathbf{r}^i seja atingida.

Tabela 4 – Algoritmo do Gradiente Conjugado Precondicionado

Passo	Operação
1	$\mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$
2	$\mathbf{z}^0 = M^{-1}\mathbf{r}^0$
3	$\mathbf{d}^0 = \mathbf{z}^0$
4	$\alpha = \frac{\mathbf{r}^i \mathbf{z}^i}{\mathbf{d}^i A \mathbf{d}^i}$
5	$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \alpha \mathbf{d}^i$
6	$\mathbf{r}^{i+1} = \mathbf{r}^i - \alpha A \mathbf{d}^i$
7	$\beta = \frac{\mathbf{r}^i \mathbf{z}^{i+1}}{\mathbf{r}^i \mathbf{z}^i}$
8	$\mathbf{d}^{i+1} = M^{-1}\mathbf{r}^{i+1} + \beta \mathbf{d}^i$

3.7 Descrição Geral do Programa

Com todas as partes necessárias para a solução do problema apresentadas, como as equações governantes e suas discretizações temporais e espaciais, e condições de contorno, resta agora definir de forma geral o algoritmo utilizado para solucionar o problema. Primeiro o programa inicia lendo um arquivo com os critérios do escoamento e malha desejados, já alocando as variáveis globais necessárias. Posteriormente, lê-se o arquivo de coordenadas dos pontos lagrangianos. Os pontos da malha lagrangiana são então aplicados em funções de translação e escalados para ficarem na posição desejada no domínio. Preenchem-se os componentes do sistema lineares (a, b, c, d, e), já aplicando as condições de contorno nos devidos pontos.

Após feita a inicialização, o programa faz sua parte iterativa seguindo os passos:

1. Atualizar os *ghost points* de \mathbf{u}^* e χ de acordo com as condições de contorno utilizadas. (Tabela 1)
2. Interpolar as velocidades u e v para os pontos da malha lagrangiana utilizando a função delta de Dirac.
3. Calcular cada componente do termo de força a partir das velocidades interpoladas no item anterior.
4. “Espalhar” o forçamento calculado na malha lagrangiana para a malha Euleriana.

5. Atualizar o vetor resposta (f) dos sistemas lineares de velocidade associados a u^* e v^* .
6. Resolver os sistemas lineares para as velocidades intermediárias utilizando o método dos gradientes conjugados.
7. Atualizar o vetor resposta dos sistemas lineares associados a pseudo-pressão χ .
8. Resolver o sistema linear para a pseudo-pressão χ utilizando o método dos gradientes conjugados.
9. Calcular o novo valor da velocidade \mathbf{u} junto com os *ghost points* de cada componente.
10. Atualizar os termos convectivos $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ e os o campo de pressão p .

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

As simulações foram feitas utilizando uma malha com 512×512 elementos nas direções x e y , em um domínio $\Omega = [0, 8] \times [0, 8]$ com um cilindro de diâmetro $r_c = 0,15$ com centro localizado no ponto $(1,85; 4,0)$, como representado na figura 7, assim tem-se que o cilindro é muito menor que o domínio Ω . Os elementos da malha estão representados fora de escala para melhorar a visualização. O cilindro foi discretizado de forma que a distância entre dois nós seja da mesma ordem de grandeza de um elemento da malha euleriana

$$\frac{2\pi r_c}{n_k} \approx h \Rightarrow n_k \approx 2\pi \frac{r_c}{h}, \quad (4.1)$$

assim discretizou-se o cilindro em $n_k = 60$ nós.

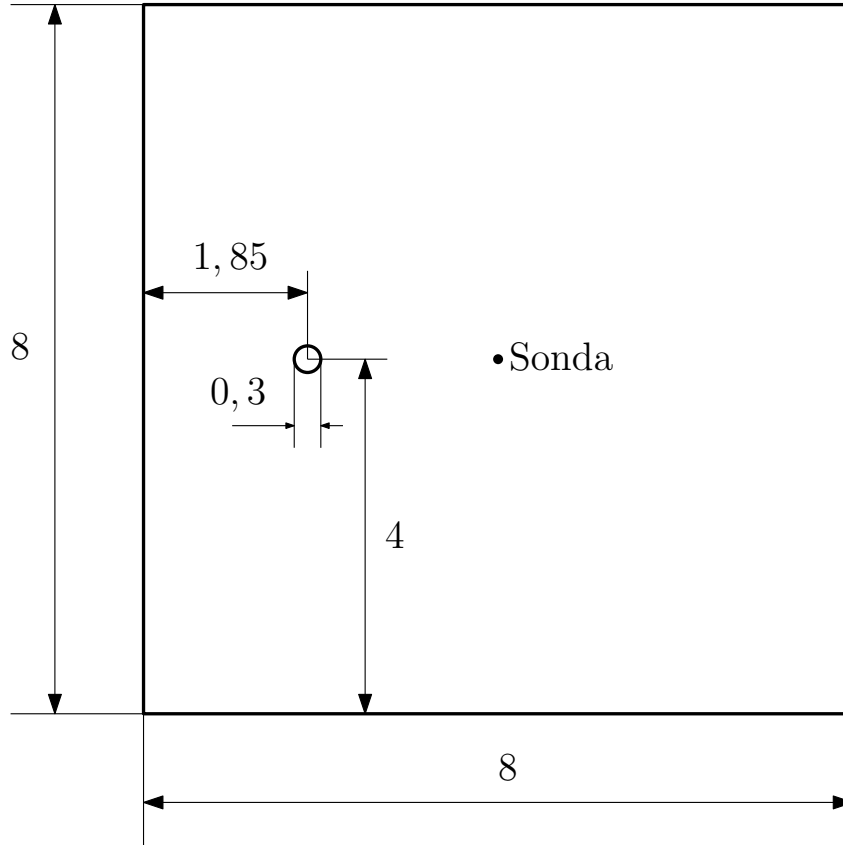


Figura 7 – Domínio computacional

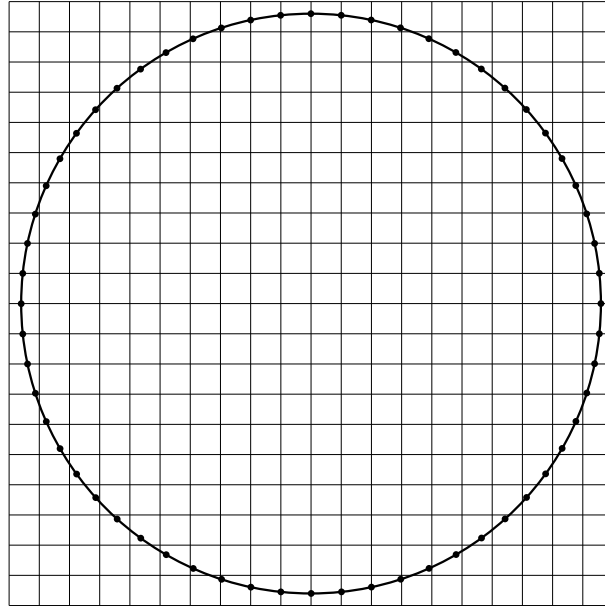


Figura 8 – Discretização perto da superfície

A figura 8 mostra a discretização espacial feita na superfície do cilindro e na malha cartesiana. O tamanho do elementos da malha possuem tamanho de $1/64$ e a distância entre os nós do cilindro é de mesma ordem.

Foram realizadas três simulações com o cilindro estático a Reynolds 100, 150 e 200, e uma simulação com o cilindro oscilando verticalmente a Reynolds 185. Esses parâmetros foram prescritos para se igualarem aos casos feitos por [Uhlmann \(2005\)](#) e assim obter uma base para comparação.

Para comparação, foram obtidos dados tais como campo de velocidades, campo de pressão, coeficientes de sustentação e arrasto, número de Strouhal, componentes tangenciais e normais nos nós da malha Lagrangiana, e as componentes da velocidade junto com a pressão em função do tempo no ponto (4,4) do domínio.

A força de arrasto é resultante das tensões viscosas e da distribuição de pressão sobre o corpo. É comum trabalhar com coeficientes adimensionais, assim definimos o coeficiente adimensional

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 D} \quad (4.2)$$

em que F_d é a força de arrasto. Neste trabalho, a força de arrasto foi computado avaliando a componente horizontal da força aplicada pela fronteira no fluido. Pela terceira lei de Newton, isto é igual ao oposto do arrasto. Logo, basta integrar essa componente da força em todo o domínio

$$F_d = - \int_{\Omega} \rho f_x d\mathbf{x}, \quad (4.3)$$

em que f_x é a componente de \mathbf{f} . Substituindo na definição de coeficiente de arrasto

$$C_d = -2 \int_{\Omega} \frac{f_x}{u_\infty^2 D} d\mathbf{x}, \quad (4.4)$$

mas as variáveis da equação (4.4) são dimensionais, podemos então adimensionalizar a componente f_x por u_∞^2/D e o diferencial $d\mathbf{x}$ por D^2 , em que D é o diâmetro do cilindro e u_∞ é a velocidade do escoamento não perturbado. Finalmente, temos

$$C_d = -2 \int_{\Omega} f_x d\mathbf{x}, \quad (4.5)$$

calculado a partir das variáveis adimensionais.

O coeficiente de sustentação é calculado de forma análoga

$$C_l = -2 \int_{\Omega} f_y d\mathbf{x}, \quad (4.6)$$

em que f_y é a componente vertical da força exercida pelo corpo no fluido. A força de sustentação se torna não nula quando o corpo começa a emitir vórtices.

Quando o escoamento se torna instável, o corpo começa a emitir vórtices com uma frequência f_q , que pode ser tornar adimensional da seguinte forma

$$St = \frac{f_q D}{u_\infty}. \quad (4.7)$$

Assim definimos o número de Strouhal como a frequência adimensional da emissão de vórtices. Mas, como o tempo é adimensionalizado por D/u_∞ , podemos escrever o número de Strouhal a partir do período adimensional de emissão de vórtices T_p da seguinte forma

$$St = \frac{1}{T_p}. \quad (4.8)$$

Todas simulações utilizam o mesmo passo de tempo $\Delta t = 3 \times 10^{-3}$, resultando em um número de CFL máximo igual a

$$CFL = \frac{u_\infty \Delta t}{\Delta x} = 0,288. \quad (4.9)$$

4.1 Cilindro Estático

Foram feitas três simulações com o cilindro estático com número de Reynolds 100, 150 e 200. O caso do cilindro estático apresenta formação de uma esteira de Von Kármán que se desenvolve a partir de uma quebra de simetria.

A figura 9 mostra a componente da velocidade na direção x em dois instantes de tempo diferentes. Começa a se formar uma região de recirculação atrás do cilindro, como mostrado na figura 9a, que eventualmente se desfaz. A figura 10 também demonstra a quebra de simetria e a periodicidade da oscilação da componente v da velocidade.

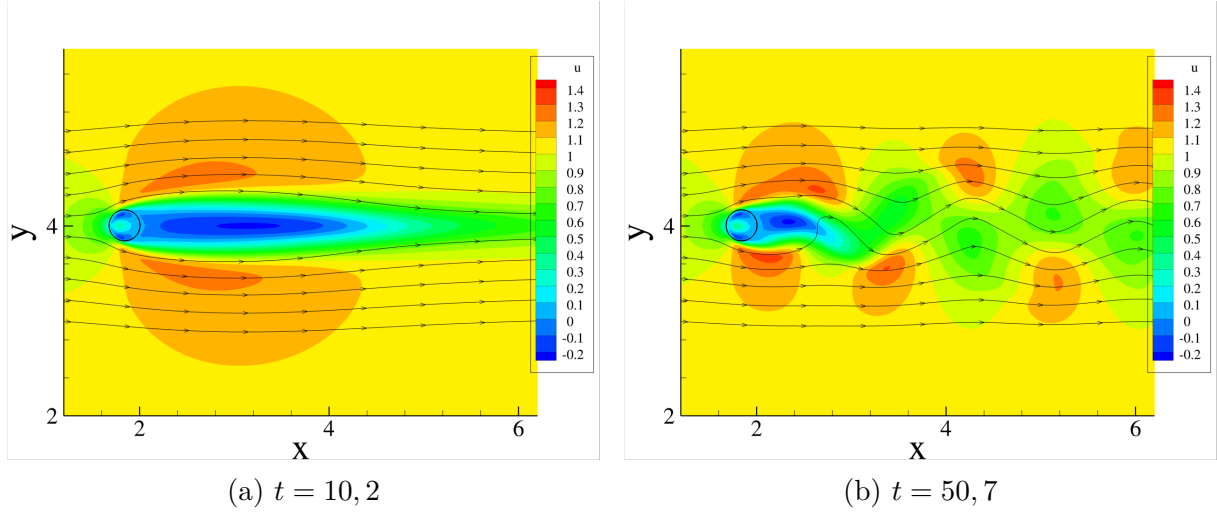


Figura 9 – Componente u em diferentes instantes de tempo - $Re = 100$

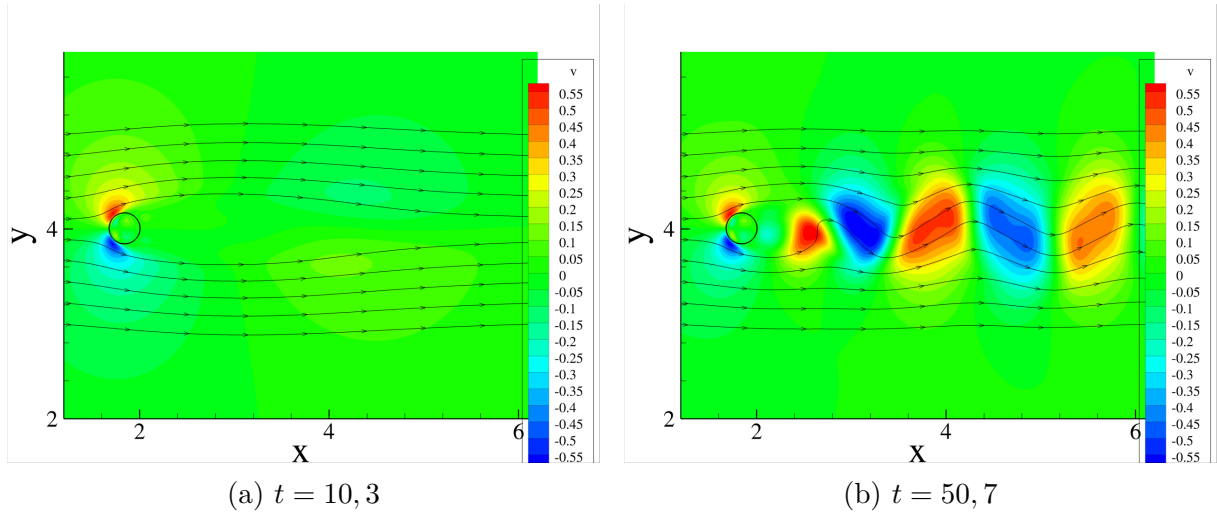


Figura 10 – Componente v em diferentes instantes de tempo - $Re = 100$

A figura 11 mostra os valores das componentes de velocidade medidas pela sonda, localizada no ponto $(4, 4)$, no tempo. Nota-se que a região de recirculação se forma suavemente com o tempo e sem oscilações, com a componente horizontal da velocidade atingindo um valor quase constante a partir do instante $t = 10$. Entretanto, a componente vertical começa a oscilar a partir do mesmo instante. O período da oscilação das duas componentes de velocidade é metade do período da oscilação dos coeficientes aerodinâmicos.

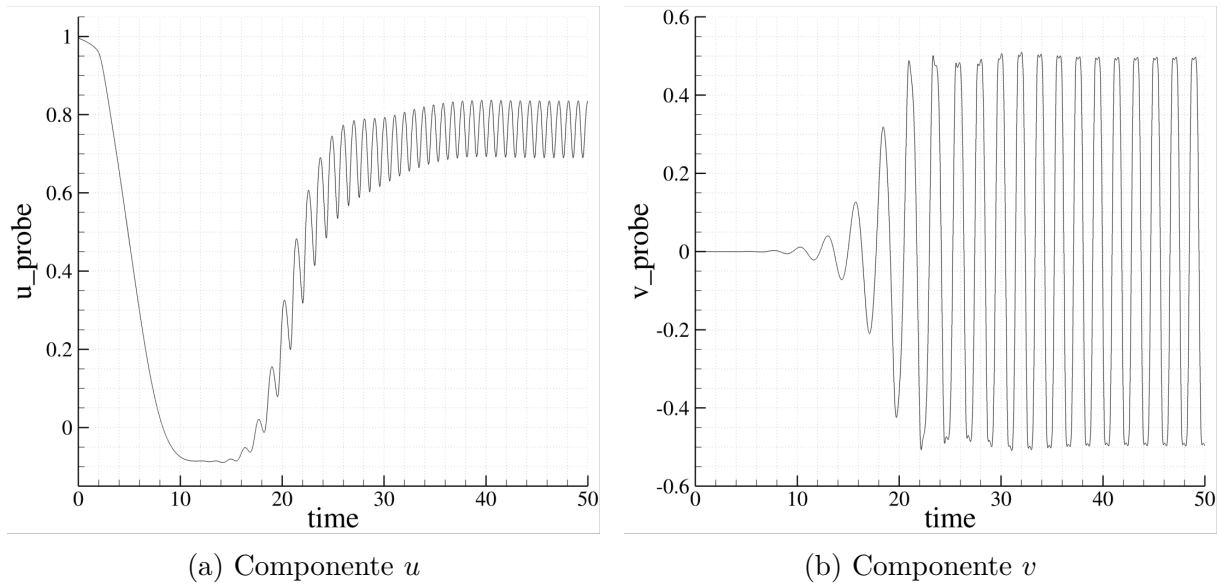


Figura 11 – Velocidade medida na sonda no tempo - $Re = 100$

O campo de pressão em vários instantes é mostrado na figura 12. Podemos perceber a evolução do escoamento até a formação de regiões de baixa pressão a jusante. Nota-se também que a região de baixa pressão oscila verticalmente, gerando uma força de sustentação não nula e periódica, tendo em vista que, neste caso, as forças de sustentação e arrasto são geradas principalmente pela distribuição de pressão na superfície do cilindro.

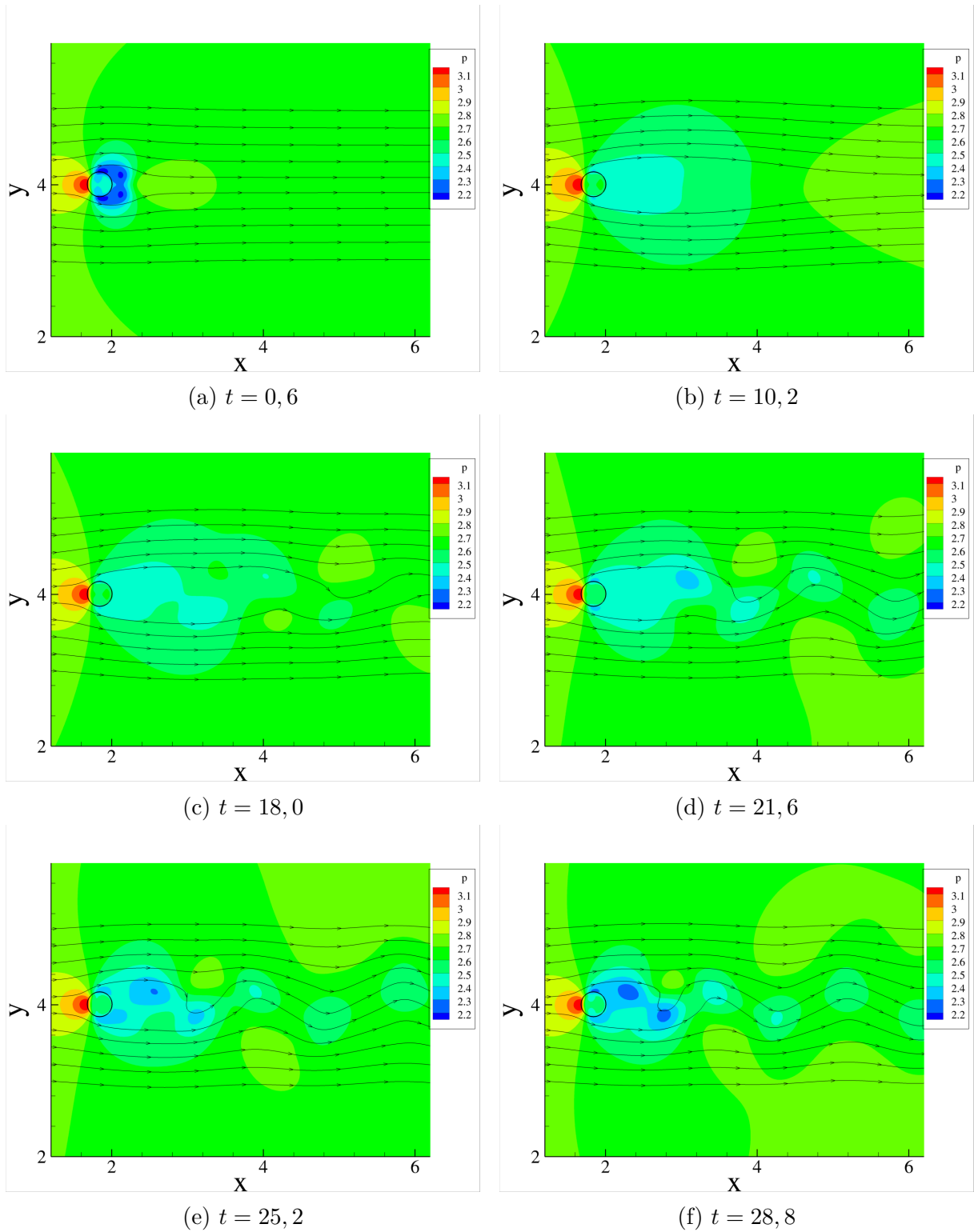


Figura 12 – Campo de pressão em diferentes instantes de tempo - $Re = 100$

A figura 13 mostra o valor da pressão medido na sonda em função do tempo. Pela figura, percebe-se que a pressão no ponto aumenta até atingir seu máximo valor próximo do instante $t = 5$, a partir do qual decresce suavemente até começar a oscilar no instante $t = 14$. A oscilação da pressão cresce e se estabiliza quando a esteira de Von Kármán se torna estável também.

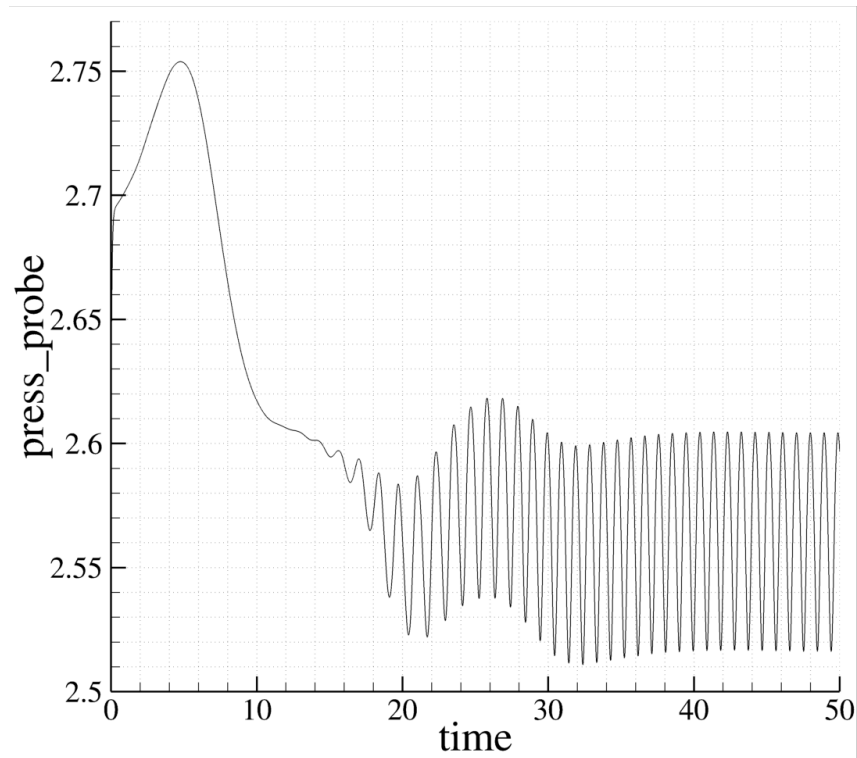


Figura 13 – Pressão medida na sonda no tempo - $Re = 100$

Os coeficientes aerodinâmicos em função do tempo são mostrados na figura 14. Podemos observar o começo da instabilidade por volta do instante $t = 16$, antes disso, a força de arrasto diminui rapidamente enquanto a força de sustentação permanecia nula. Entre os instantes $t = 16$ e $t = 40$, o escoamento apresenta um regime transiente não estável, caracterizado pelo aumento da força de arrasto e o aumento da amplitude da força de sustentação. A partir do instante $t = 40$, o regime transiente se torna estável, com o coeficiente de arrasto com valor médio de $C_d = 1,62$ e coeficiente de sustentação com valor máximo de $C_l = 0,2$.

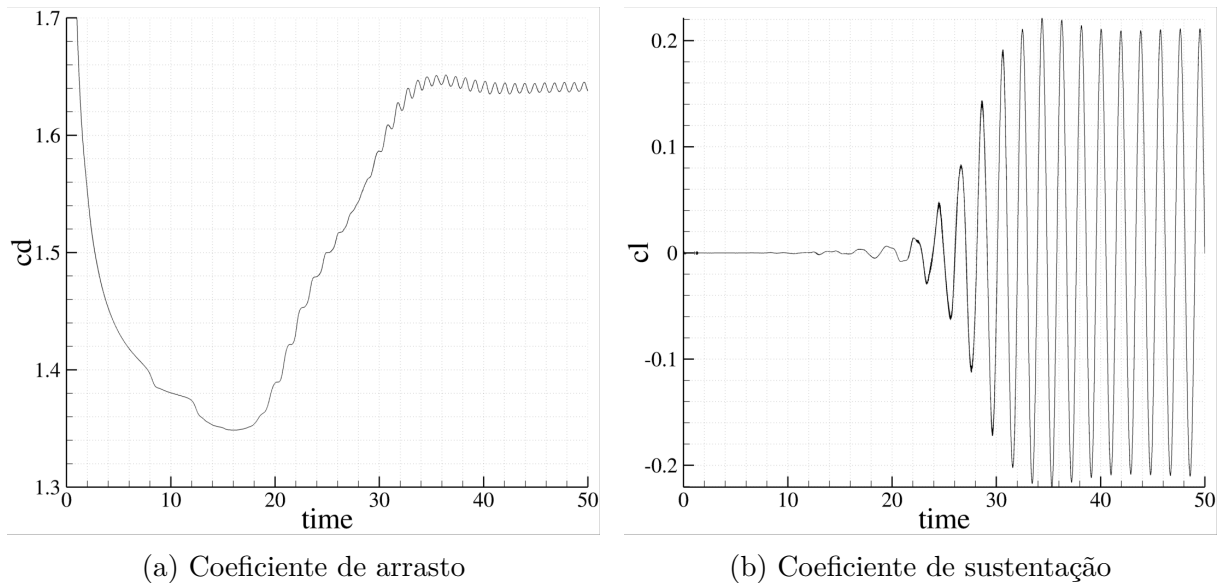


Figura 14 – Coeficientes aerodinâmicos no tempo - $Re = 100$

A tabela 5 foi criada a partir dos dados disponíveis em Uhlmann (2005) e Kim, Kim e Choi (2001) para comparar os valores dos coeficientes aerodinâmicos entre diferentes autores. Os valores obtidos no presente trabalho se mostram satisfatórios, entretanto, há uma pequena diferença entre os valores obtidos para arrasto médio e flutuação da sustentação. Esta diferença pode ser devida a ordem do método, como será discutido adiante.

Tabela 5 – Coeficientes aerodinâmicos para cilindro estacionário - $Re = 100$

	\bar{C}_d	C'_d	C'_l
Presente	1,64	$\pm 0,01$	$\pm 0,21$
Uhlmann - 1	1,501	$\pm 0,011$	$\pm 0,349$
Uhlmann - 2	1,453	$\pm 0,011$	$\pm 0,339$
Liu	1,350	$\pm 0,012$	$\pm 0,339$
Kim	1,33	-	0,32
Park	1,33	-	0,33

A figura 15 mostra a vorticidade em diferentes instantes de tempo para $Re = 100$. Nestas figuras, percebe-se claramente o começo simétrico do escoamento e sua eventual quebra de simetria com a emissão de vórtices. No intervalo mostrado, é possível contar quatro vórtices que foram emitidos. A vorticidade sobre a superfície do cilindro está associada a camada limite, pois esta apresenta grande magnitude do rotacional do campo de velocidades e está restrita a superfície do cilindro.

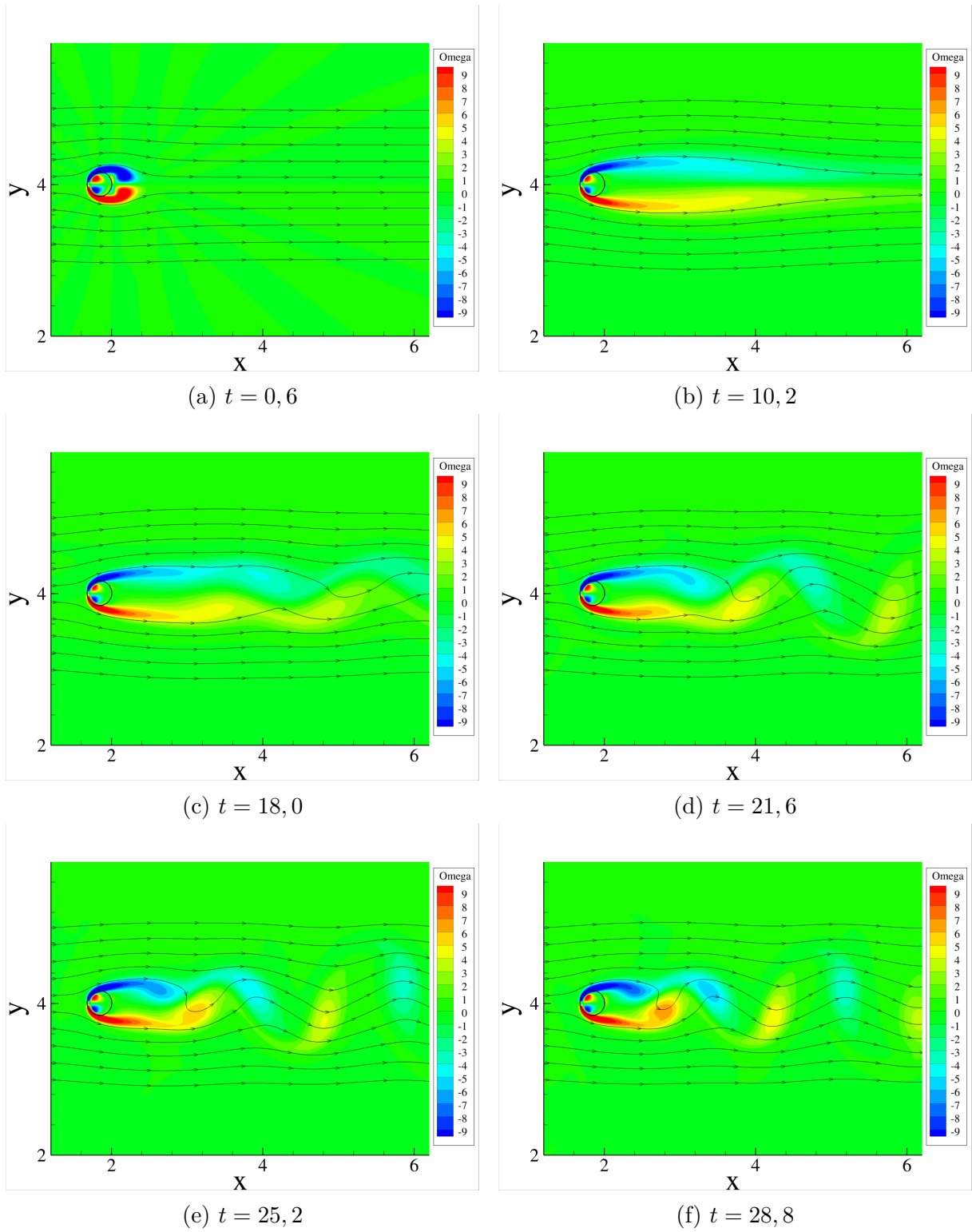


Figura 15 – Vorticidade em diferentes instantes - $Re = 100$

As figuras 16 e 17 mostram o campo de velocidades ao redor do fluido para $Re = 150$. Antes da formação da esteira, as linhas de corrente apresentam um desvio maior perto do cilindro no mesmo instante de tempo para $Re = 100$, indicando um campo de pressão mais intenso neste caso do que no caso anterior, como era de se esperar pelo número de Reynolds maior.

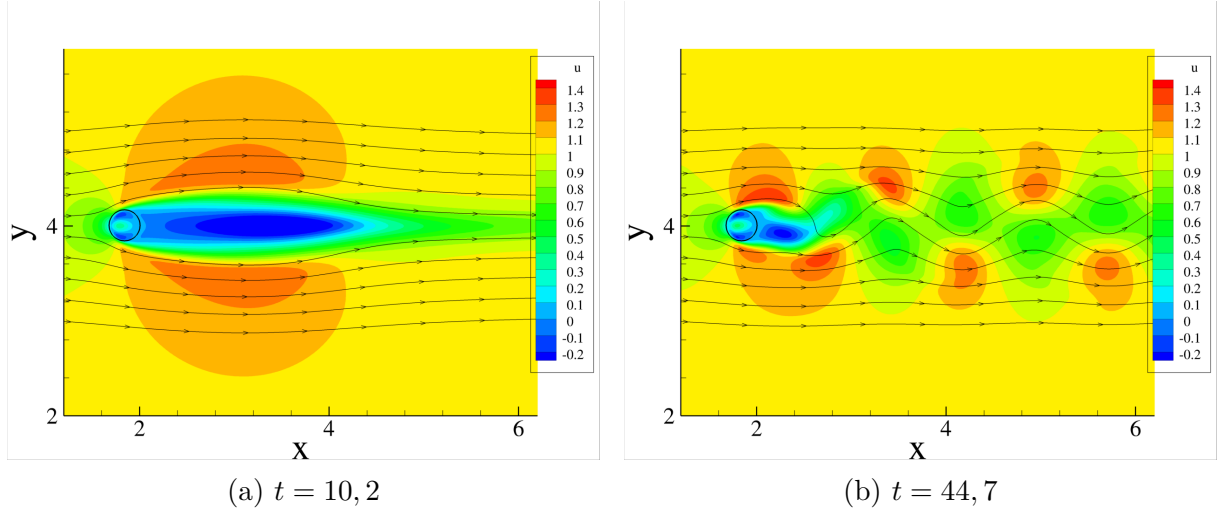


Figura 16 – Componente u em diferentes instantes - $Re = 150$

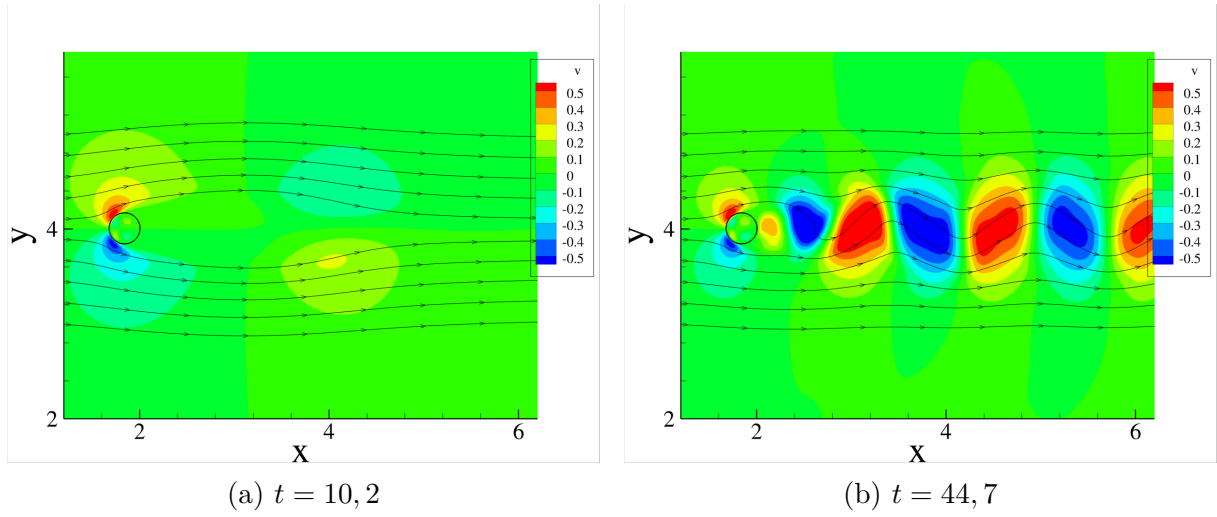


Figura 17 – Componente v em diferentes instantes - $Re = 150$

A componentes do campo de velocidade medido na sonda é mostrado na figura 18. Comparando com o caso de $Re = 100$, é possível perceber que a região de recirculação cresce de forma mais lenta, entretanto, chega a obter uma velocidade maior em módulo no sentido contrário ao do escoamento. Em ambos os casos, a instabilidade se inicia por volta do instante $t = 10$.

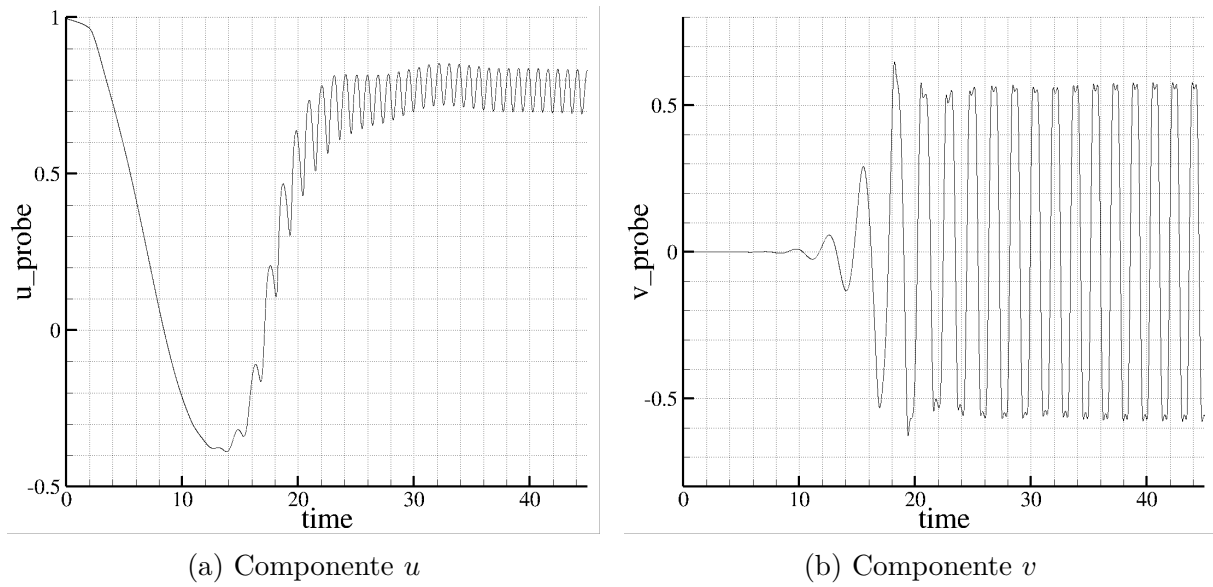


Figura 18 – Velocidade medida na sonda no tempo - $Re = 150$

O campo de pressão para $Re = 150$ é mostrado na figura 19. Com relação ao caso com $Re = 100$, ocorre um crescimento das regiões de baixa pressão, ou seja, uma parte maior do escoamento apresenta pressões baixas, assim como valores mínimos ainda menores. Novamente, o deslocamento da região de baixa pressão no bordo de fuga causa a flutuação dos coeficientes aerodinâmicos.

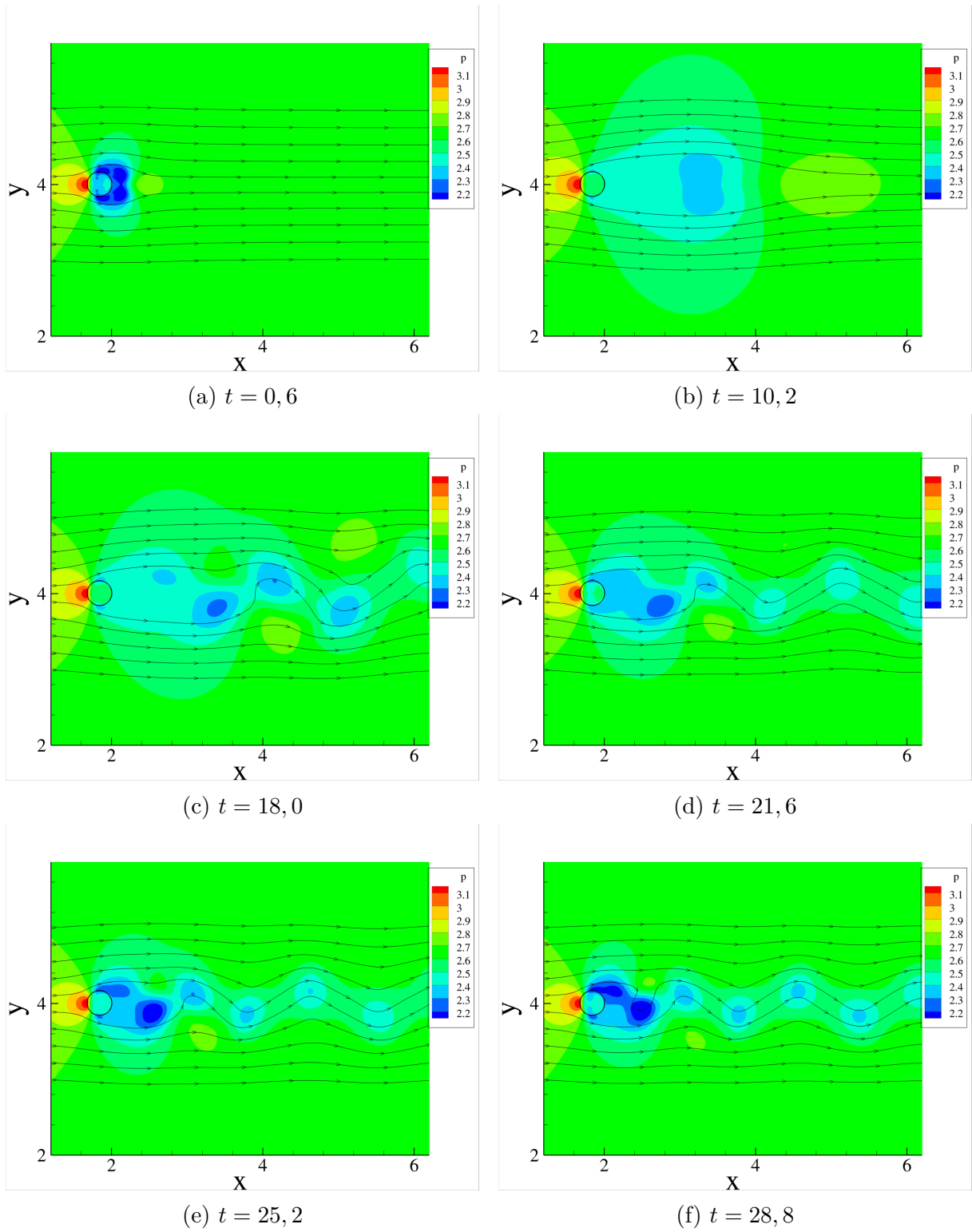


Figura 19 – Campo de pressão em diferentes instantes - $Re = 150$

A evolução da pressão medida na sonda no tempo é mostrada na figura 20. O comportamento é similar o caso anterior, diferenciando no instante de tempo que começa a oscilar e no intervalo que oscila. A oscilação começa em torno do instante $t = 12$ e é limitada entre 2,4 e 2,55.

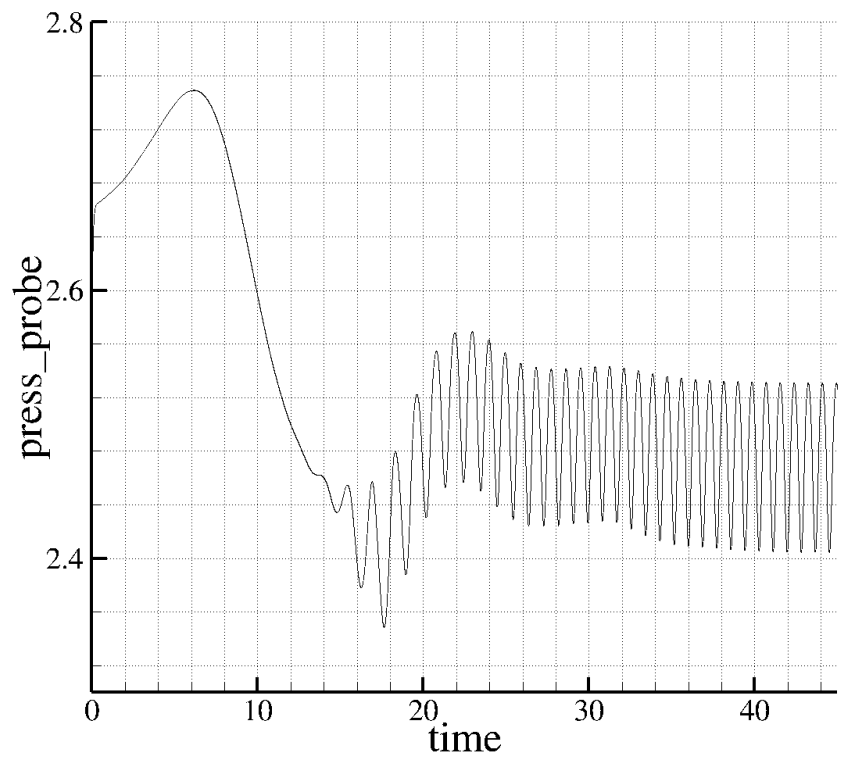
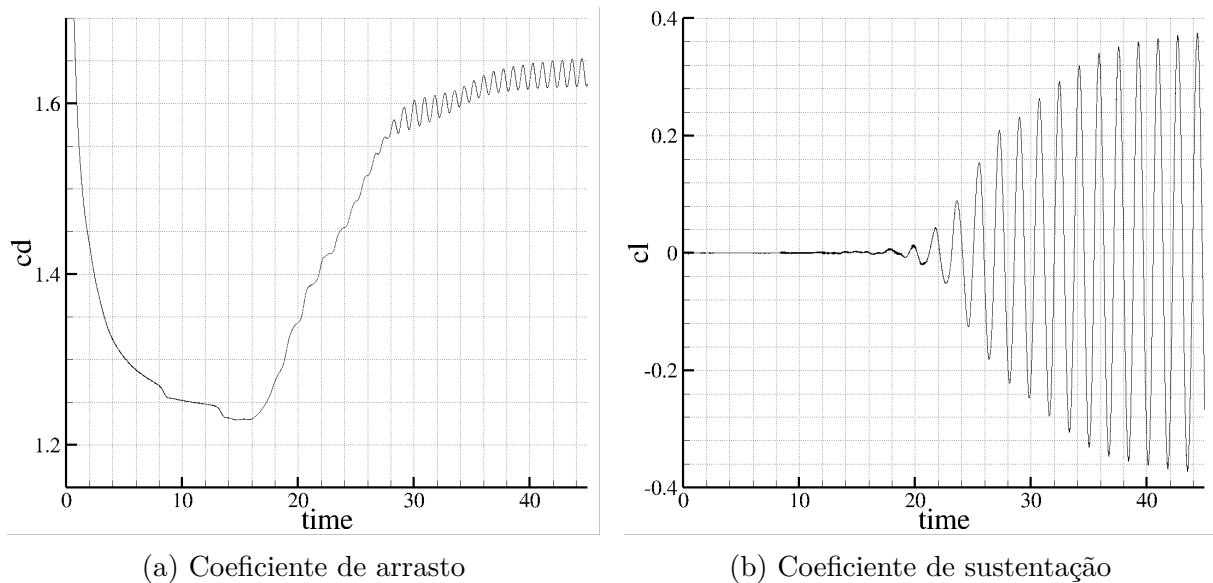


Figura 20 – Pressão medida na sonda no tempo - $Re = 150$

Os coeficientes aerodinâmicos para os caso $Re = 150$ são mostrados na figura 21. Percebe-se que os coeficientes aerodinâmicos possuem um regime transiente instável maior do que o caso anterior. No caso do coeficiente de arrasto, a força de arrasto aumenta rapidamente entre os instantes $t = 16$ e $t = 18$, mas aumenta vagarosamente após este instante até atingir a estabilidade. O coeficiente de sustentação cresce mais rápido e quase alcança o valor de 0,4, quase o dobro de quando $Re = 100$.



(a) Coeficiente de arrasto

(b) Coeficiente de sustentação

Figura 21 – Coeficientes aerodinâmicos no tempo - $Re = 150$

As figuras 22 e 23 representam os coeficientes aerodinâmicos no tempo obtidos

por [Lai e Peskin \(2000\)](#). Os autores utilizaram três métodos diferentes para calcular a força de arrasto, por isso são representadas três curvas. Percebe-se que os coeficientes se comportam de maneira similar ao caso em que foi utilizado o método de primeira ordem.

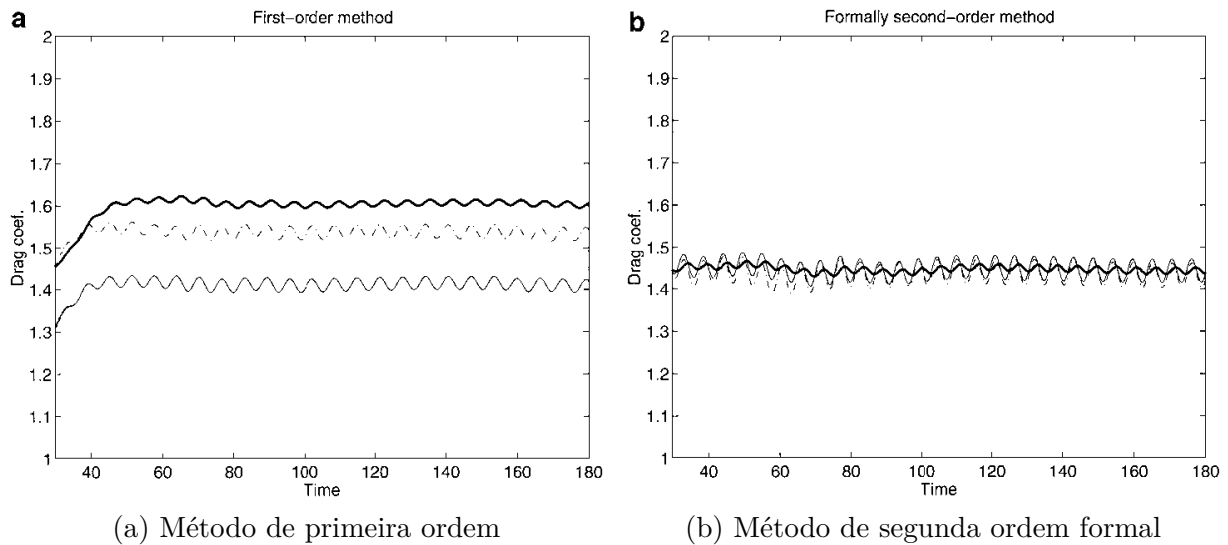


Figura 22 – Coeficientes de arrasto - $Re = 150$ - retirado de ([LAI; PESKIN, 2000](#))

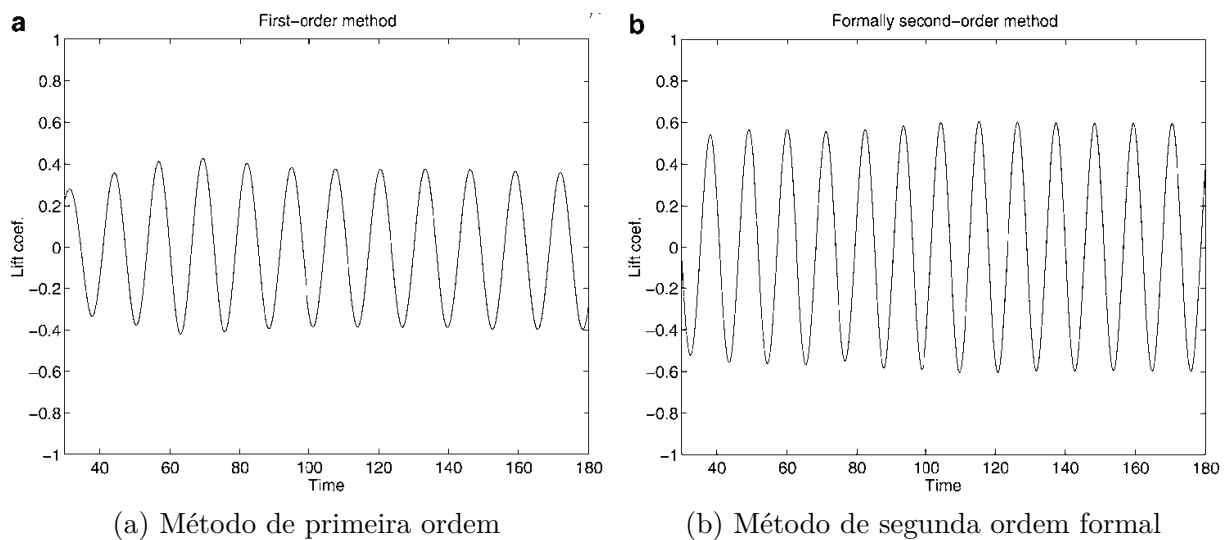
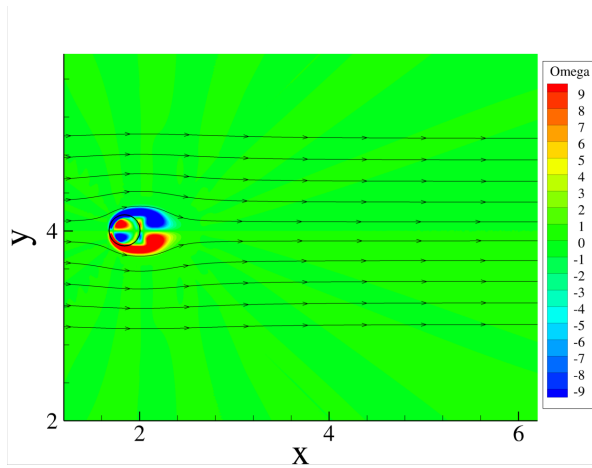
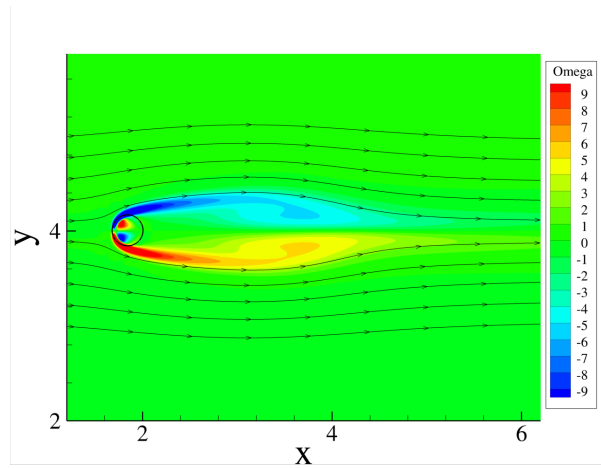


Figura 23 – Coeficientes de sustentação - $Re = 150$ - retirado de ([LAI; PESKIN, 2000](#))

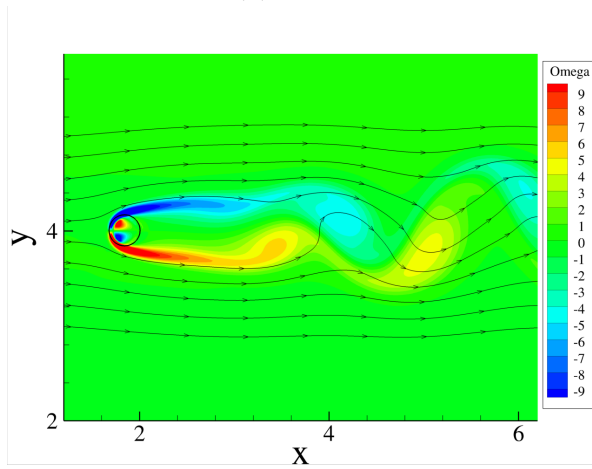
A vorticidade em diferentes instantes para o caso $Re = 150$ é mostrada na figura 24. Nota-se a formação de vórtices mais intensos, o que leva a uma pressão mais baixa no centro do vórtice, como já visto. A figura 25 mostra os contornos instantâneos de vorticidade obtidos por [Lai e Peskin \(2000\)](#) para o caso $Re = 150$ com primeira (figura a cima) e segunda ordem (figura abaixo). Fazendo uma análise qualitativa dos vórtices, percebe-se que os vórtices obtidos neste trabalho se assemelham aos obtidos pelos autores com a metodologia de primeira ordem.



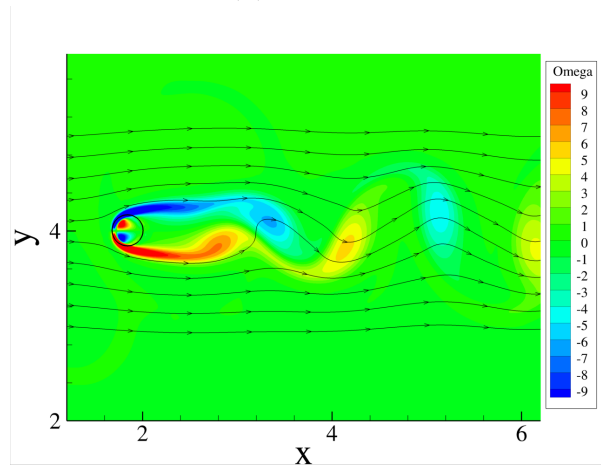
(a) $t = 0,6$



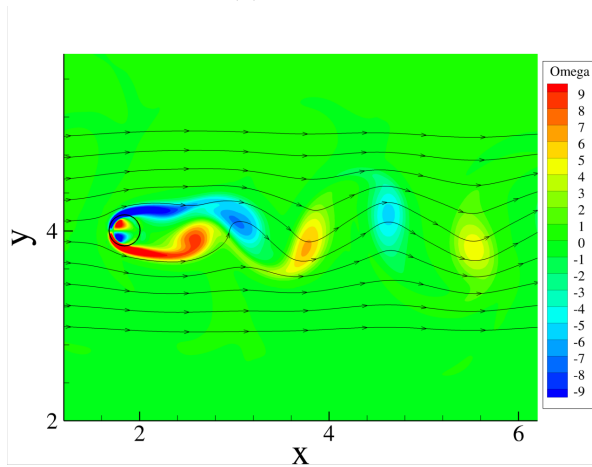
(b) $t = 10,2$



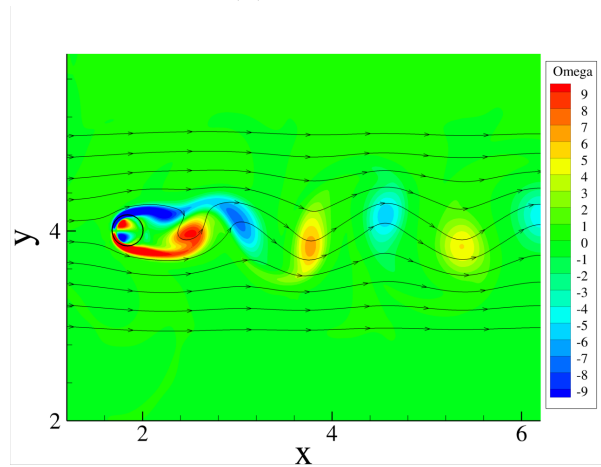
(c) $t = 18,0$



(d) $t = 21,6$



(e) $t = 25,2$



(f) $t = 28,8$

Figura 24 – Vorticidade em diferentes instantes - $Re = 150$

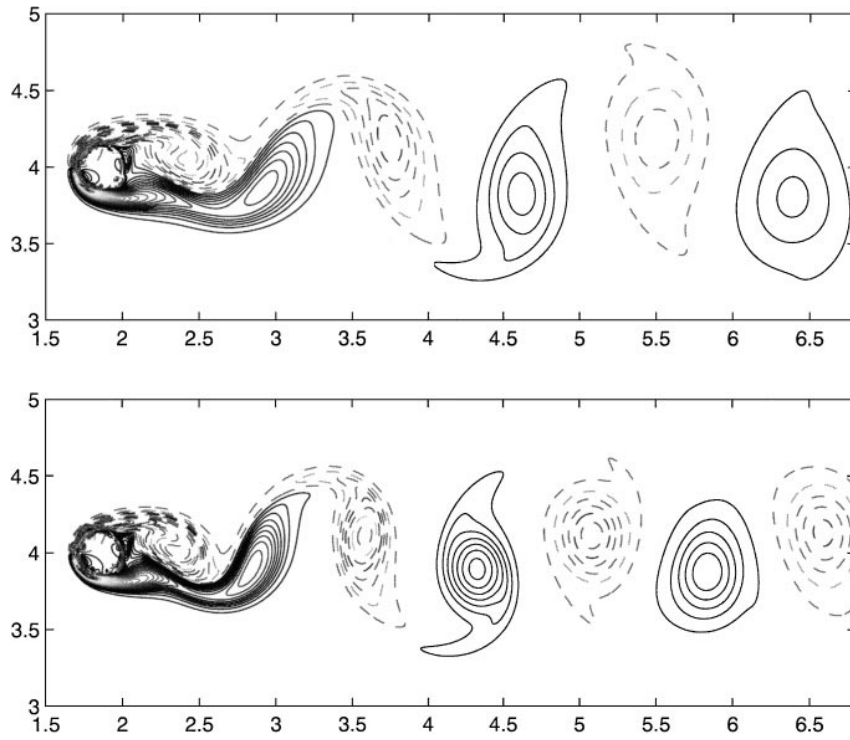


Figura 25 – Contornos instantâneos de vorticidade para $Re = 150$ (LAI; PESKIN, 2000)

Para Reynolds 200, o campo de pressão é ainda mais intenso, resultando em desvios maiores das linhas de corrente quando comparado ao mesmo instante de tempo dos casos com Reynolds 100 e 150. Como mostrado nas figuras 26, 27 e 28, a instabilidade se inicia mais rapidamente que os casos anteriores. Além disso, este caso apresenta as maiores flutuações da componente v de velocidade, embora seja pequena a diferença com o caso $Re = 150$.

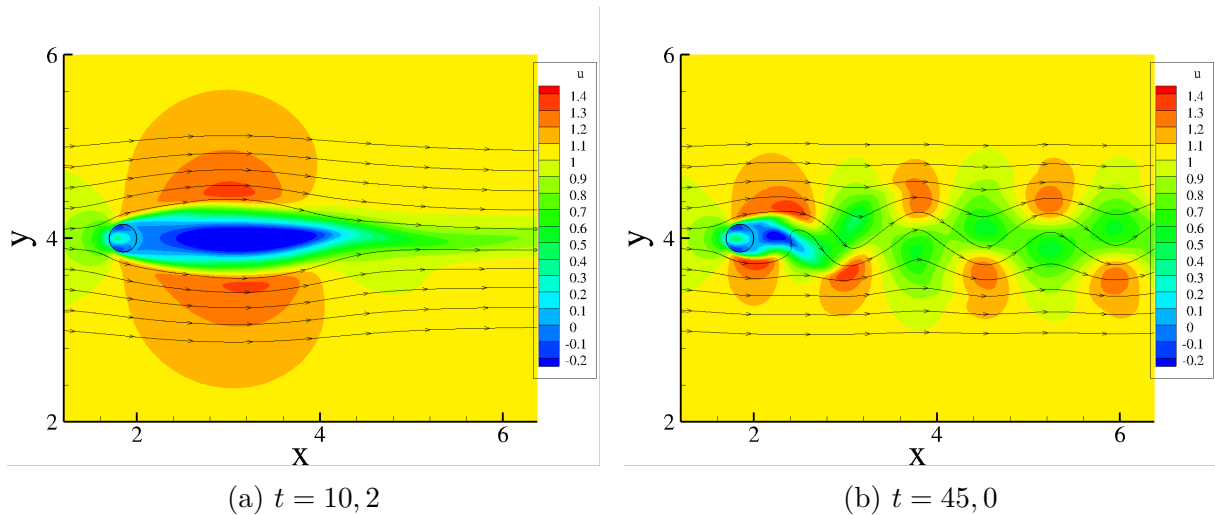


Figura 26 – Componente u em diferentes instantes - $Re = 200$

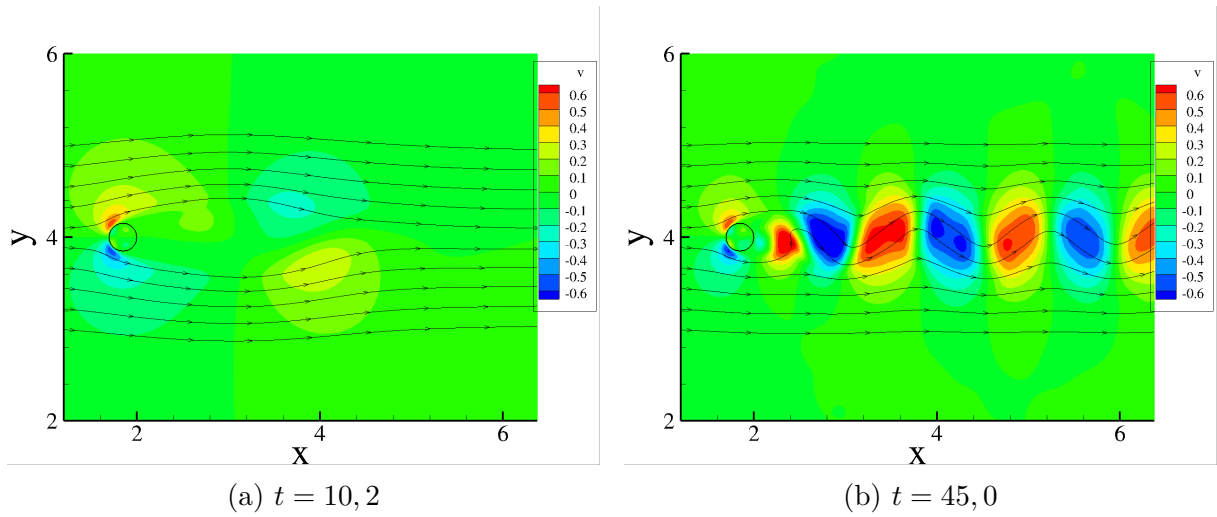


Figura 27 – Componente v em diferentes instantes - $Re = 200$

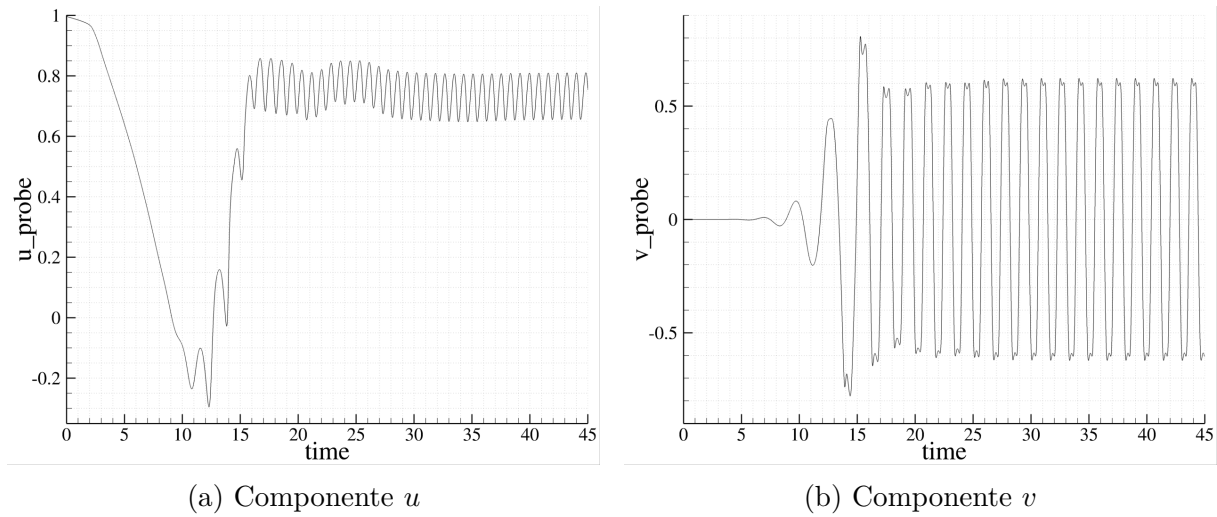


Figura 28 – Velocidade medida na sonda no tempo - $Re = 200$

Como já mencionado, o campo de pressão mostrado na figura 29 é o mais intenso de todos os casos para cilindro estático. Nota-se a diminuição da distância vertical entre os pontos de baixa pressão a jusante do cilindro, decorrente advecção do escoamento. Como mostra a figura 30, a pressão oscila nos níveis mais baixos comparado ao outros casos, principalmente no instante $t = 15$, quando o efeito combinado da queda de pressão junto com a passagem de um vórtice levou ao mais baixo nível de pressão medido. Mesmo com o forte campo de pressão, os coeficiente aerodinâmicos não variam significativamente, como mostra a figura 31.

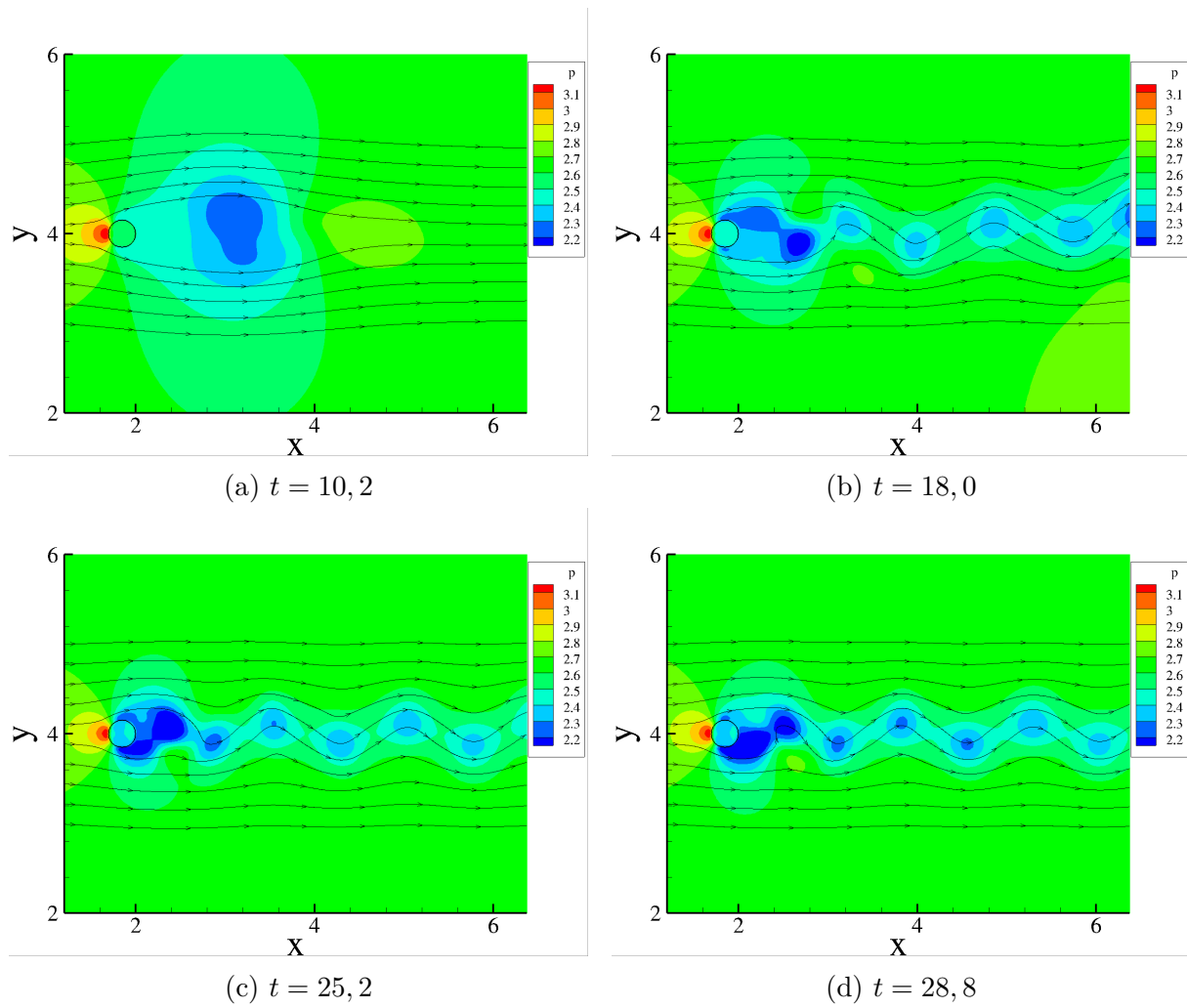


Figura 29 – Campo de pressão em diferentes instantes - $Re = 200$

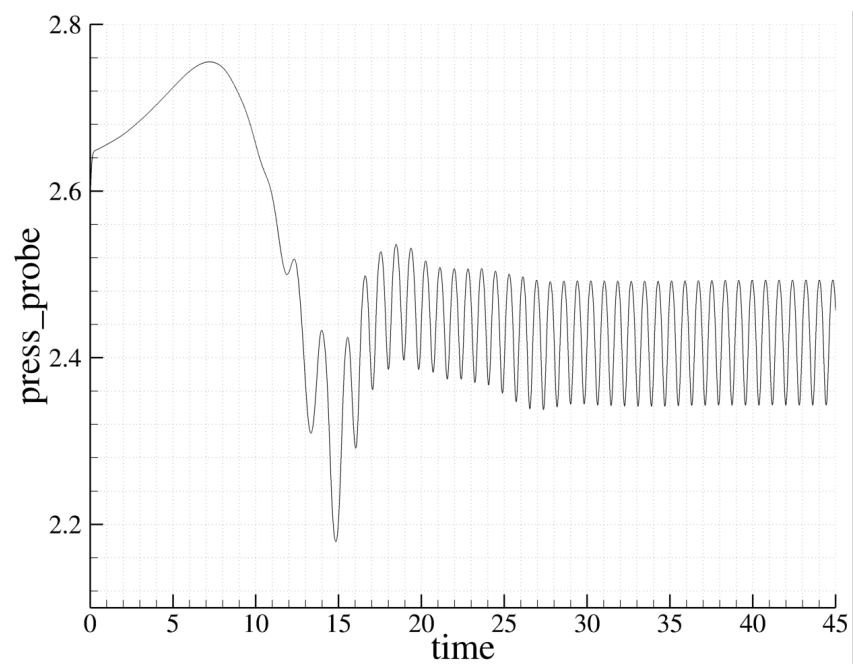
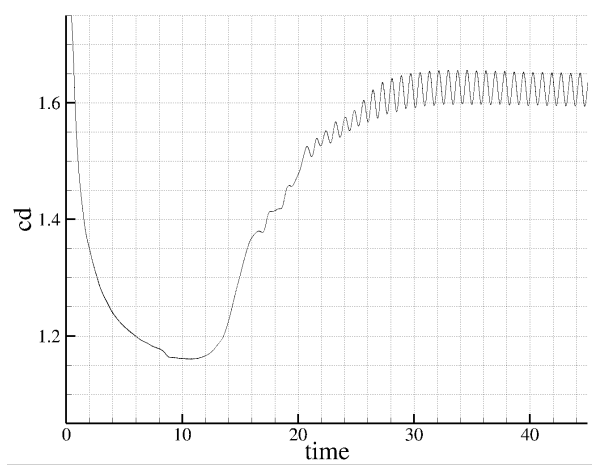
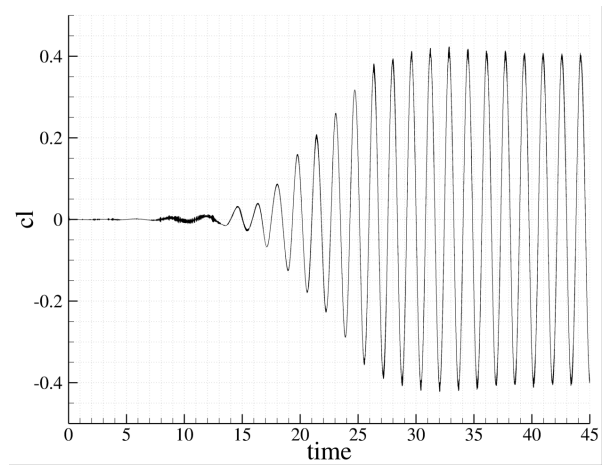


Figura 30 – Pressão medida na sonda no tempo - $Re = 200$



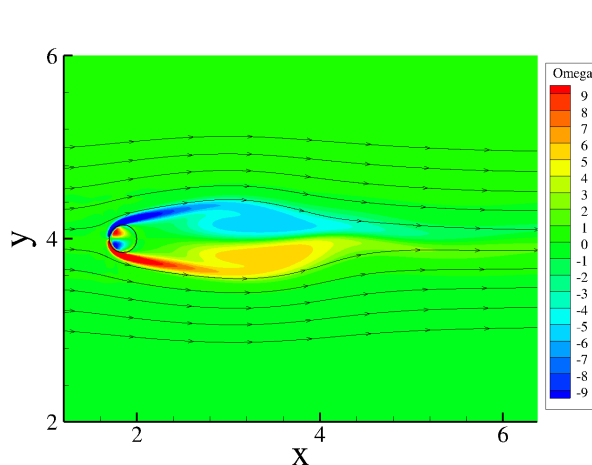
(a) Coeficiente de arrasto



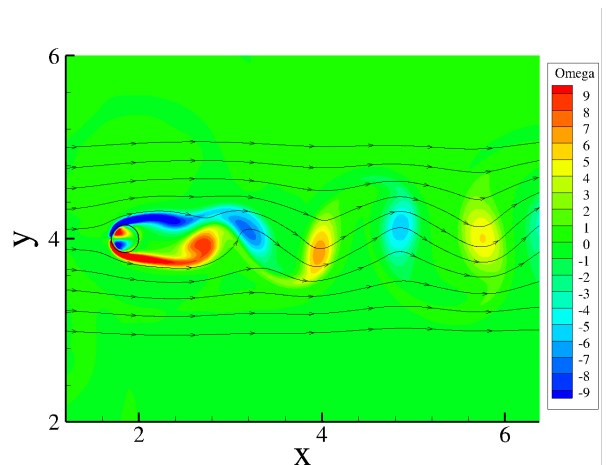
(b) Coeficiente de sustentação

Figura 31 – Coeficientes aerodinâmicos no tempo - $Re = 200$

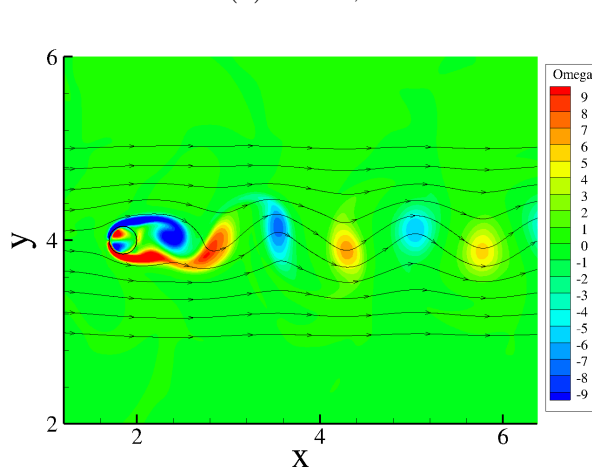
Assim como a pressão, a vorticidade é mais intensa neste escoamento. A figura 32 mostra que os vórtices são os mais intensos dos três casos e que estão melhor definidos no escoamento.



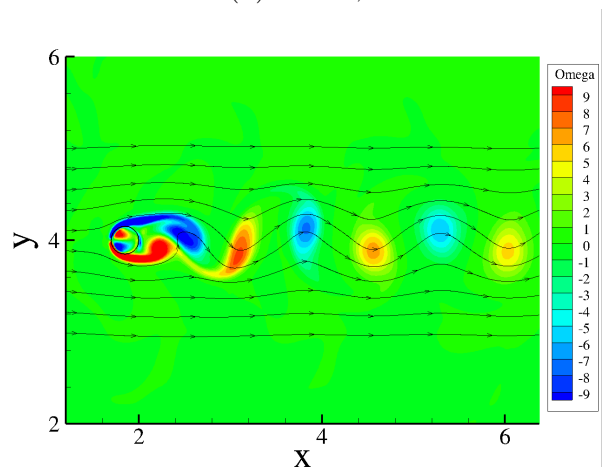
(a) $t = 10,2$



(b) $t = 18,0$



(c) $t = 25,2$



(d) $t = 28,8$

Figura 32 – Vorticidade em diferentes instantes - $Re = 200$

A tabela 6 apresenta os números de Strouhal obtidos neste trabalho e de outros autores para comparação. A tabela apresenta valores retirados de Lai e Peskin (2000), os autores deste artigo utilizaram dos métodos distintos, por isso possuem duas colunas. O número de Strouhal foi calculado como o inverso do período do coeficiente de sustentação, lembrando que este período é o dobro da oscilação de velocidade medido pela sonda.

Tabela 6 – Comparação entre os números de Strouhal

Re	Presente	Lai - 1	Lai - 2	Williamson (Exp.)	Roshko (Exp.)
100	0,158	0,144	0,165	0,166	0,164
150	0,177	0,156	0,184	0,183	0,182
200	0,185	0,163	0,190	0,197	0,190

Comparando os números de Strouhal obtidos neste projeto com os obtidos por outros trabalhos, observa-se que os valores se encontram próximos apesar de que os obtidos são levemente inferiores aos demais, com exceção a Lai - 1. Lai e Peskin (2000) utilizaram dois métodos, com acurácia de primeira ordem e outro com acurácia formal de segunda ordem. Os autores nomeiam de acurácia *formal* pois o uso de uma função delta de Dirac discreta impede que o método da fronteira imersa possua acurácia maior que primeira ordem. Para que o método seja verdadeiramente de segunda ordem, é necessário utilizar uma função suave que independe da malha no lugar de δ_h (LAI; PESKIN, 2000).

Para verificar e a condição de não deslizamento na superfície está sendo satisfeita, foi medida a velocidade do escoamento em cada nó da malha lagrangiana. Esta velocidade é a interpolação das velocidades com a função delta de Dirac, \mathbf{U}_k . Com o objetivo de se observar os fluxos pelos elementos da malha langriana, o vetor \mathbf{U}_k foi escrito em função das componentes normais e tangenciais em cada ponto. As componentes instantâneas normais e tangenciais da velocidade para $Re = 200$ encontradas em cada nó em são mostradas na figura 33.

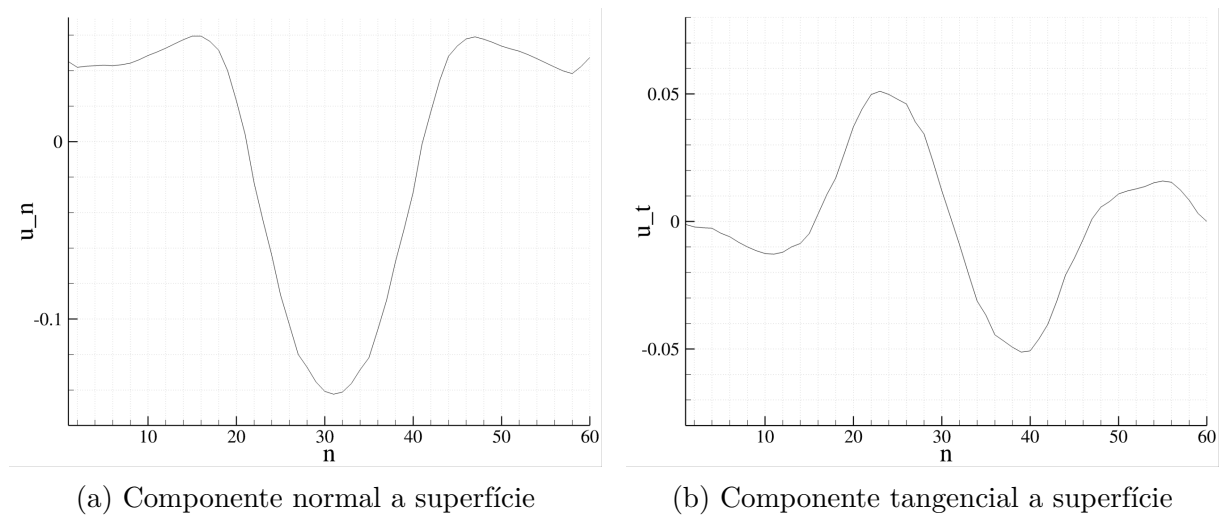


Figura 33 – Velocidade em cada nó da malha lagrangiana.

Nota-se que, ambas as componentes, não possuem valor nulo na maioria dos pontos indicando que o método utilizado não foi capaz de garantir a condição de aderência. Entretanto, os valores absolutos destas componentes são pequenos quando comparados aos valores predominantes no escoamento. O valor absoluto máximo da componente normal U_n é inferior a 0,15 e os maiores valores absolutos acontecem em poucos pontos. Quanto a componente tangencial U_t , os resultados são ainda melhores, o valor absoluto máximo é inferior a 0,06. Pelo princípio de conservação de massa, o somatório das componentes normais deve ser nulo, mas o que se observa de fato é um valor $\sim 10^{-4}$.

Apesar do método utilizado não garantir a condição de aderência, os resultados obtidos tais como coeficientes aerodinâmicos e número de Strohal se encontram satisfatórios. O mesmo efeito foi obtido por [Kim, Kim e Choi \(2001\)](#), os autores contornaram este problema utilizando fontes e sorvedouros e conseguiram reduzir a velocidade da fronteira de $\sim 10^{-2}$ para $\sim 10^{-8}$. Um modelo similar poderia ser implementado para tornar o modelo mais próximo a realidade.

4.2 Cilindro com Oscilação Vertical

Esta simulação foi feita simulando um escoamento ao redor de um cilindro com oscilação vertical dependente do tempo imposta por

$$y_c(t) = A \sin(2\pi f_f t), \quad (4.10)$$

com amplitude definida como $A = 0,2D$ e frequência $f_f = 0,52$. O número de Reynolds foi definido como 185 para garantir as mesmas condições de [Uhlmann \(2005\)](#). Outros parâmetros tais como posição inicial do cilindro, diâmetro, malha e condições de contorno são os mesmos do caso estacionário.

A figura 34 representa a componente da velocidade do escoamento na direção x em diferentes instantes de tempo. Nota-se que o campo de velocidade perde a simetria já no começo da simulação, fato causado pela oscilação do cilindro. Ocorre a formação de uma pequena região de recirculação no bordo de fuga do cilindro.

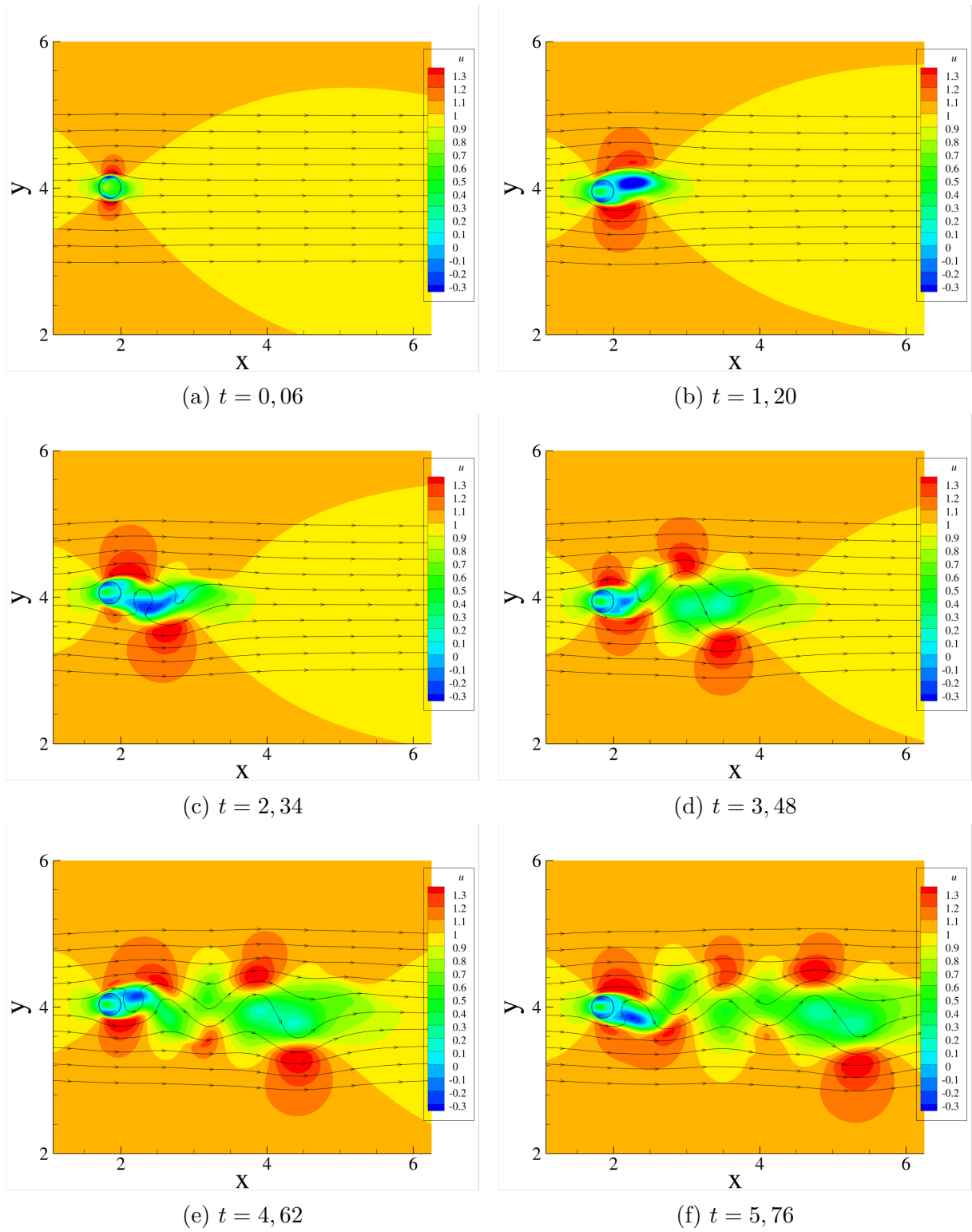


Figura 34 – Componente u em diferentes instantes

A figura 35 mostra a componente vertical em dois instantes de tempo distintos. Neste caso, nota-se que esta componente também não apresenta simetria e sua evolução no tempo ocorre de forma similar a componente horizontal.

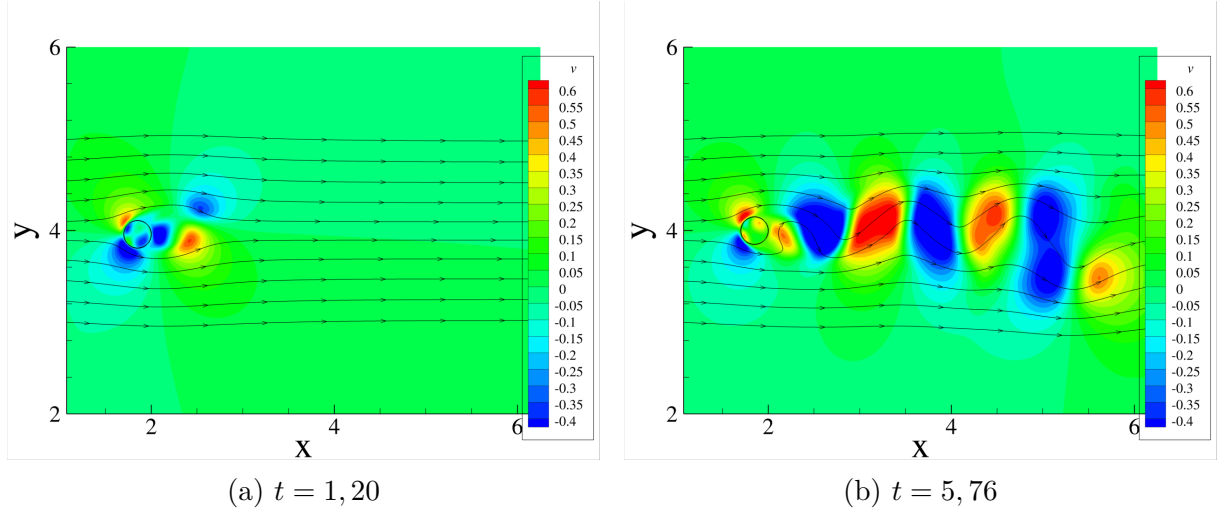


Figura 35 – Componente v em diferentes instantes

A figura 36 mostra as componentes do campo de velocidades medido na sonda em cada instante de tempo. O comportamento da velocidade u é claramente afetado pela oscilação do cilindro. A região de recirculação não se forma como nos outros casos, a velocidade já oscila antes da formação da recirculação e nunca atinge um valor negativo na sonda. Ambas componentes apresentam oscilação a partir do instante $t = 2$, transitando para um regime estável em $t = 7$.

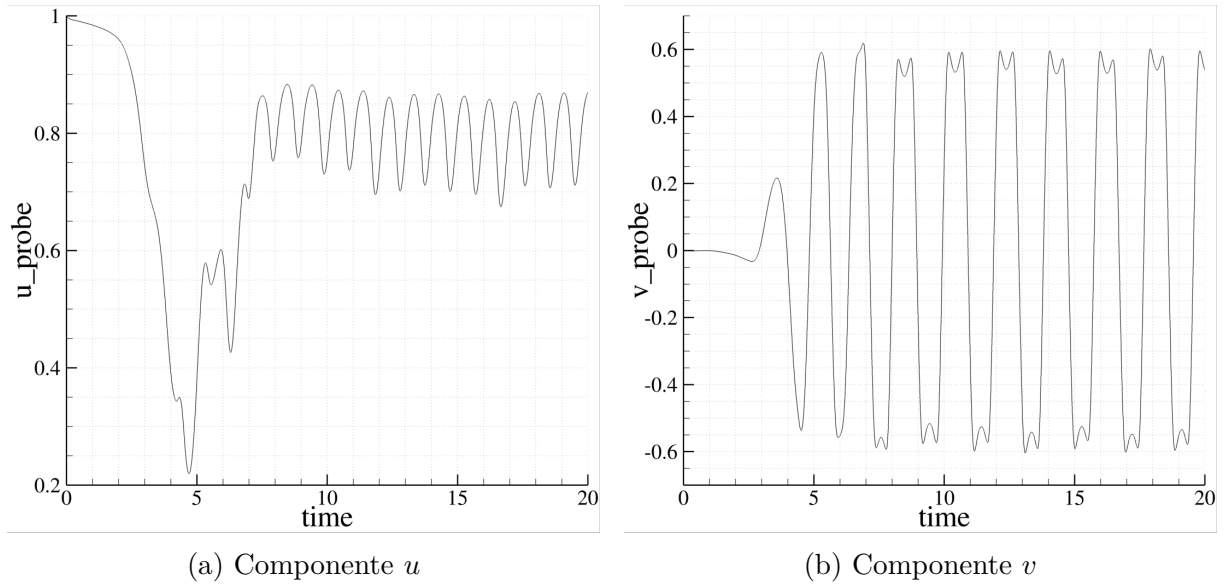


Figura 36 – Velocidade medida na sonda no tempo para cilindro oscilando - $Re = 185$

O campo de pressão é mostrado na figura 37. Nestas imagens pode-se ver a formação de regiões de baixa pressão a jusante do cilindro. Em 37a observa-se grandes variações de pressão no interior do cilindro e ao cruzar sua superfície, isto ocorre nas primeiras iterações devido as forças de campo calculadas para compensar a condição inicial. Também é possível reparar que a zona de baixa pressão no bordo de fuga do cilindro se desloca

de modo significativo na vertical, isto gera o surgimento de um coeficiente de sustentação não nulo.

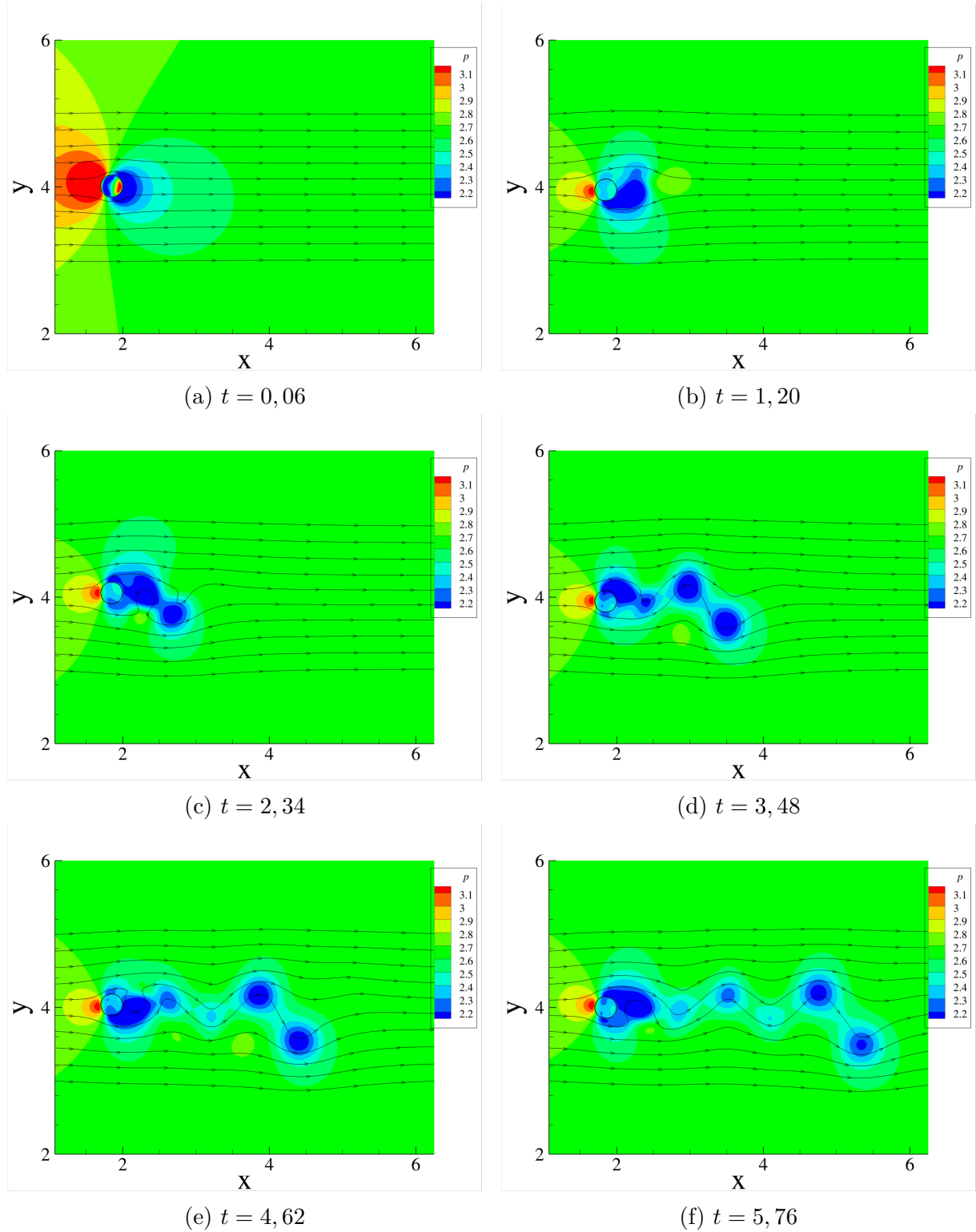


Figura 37 – Pressão em diferentes instantes

A pressão medida na sonda em função do tempo para o cilindro oscilando é mostrada na figura 38. Assim como a componente u da velocidade, a pressão sofre uma queda brusca logo antes do instante $t = 5$ decorrente da passagem do centro de um vórtice. Após este instante, a pressão oscila até atingir estabilidade em $t = 7$. Devido a oscilação

do cilindro, os vórtices são emitidos a alturas y próximas, o que resulta na variação mais acentuada nos pontos de baixa pressão.

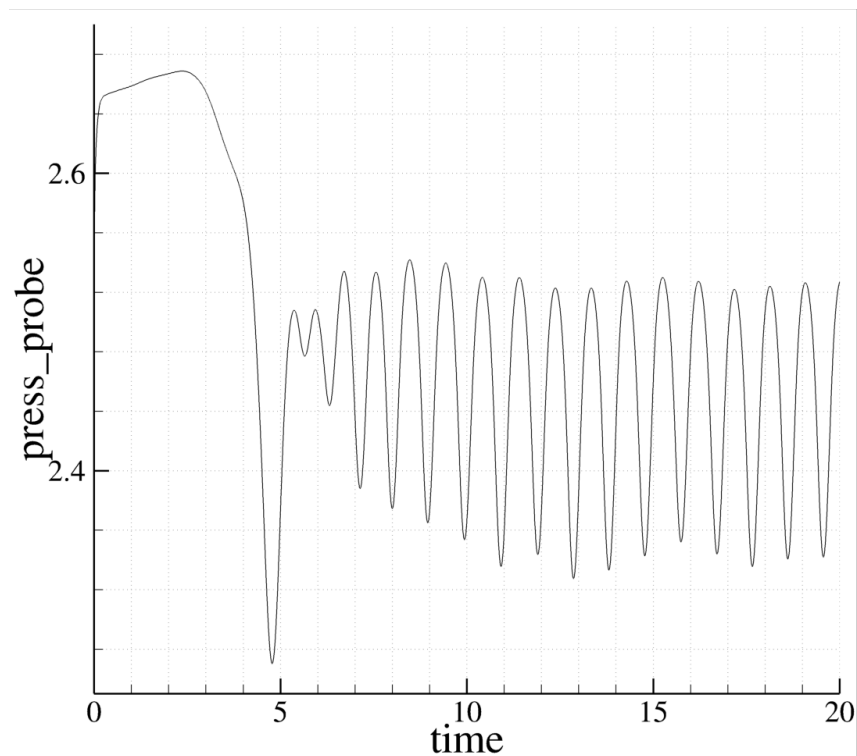


Figura 38 – Pressão medida na sonda no tempo - $Re = 150$

A figura 39 mostra os coeficientes aerodinâmicos em função do tempo para o cilindro oscilando. O coeficiente de arrasto apresenta um comportamento não suave em diversos instantes, Uhlmann (2005) atribuiu essa oscilação a suavidade da interpolação utilizando a função delta de Dirac, seria necessário a utilização de mais pontos para uma interpolação mais suave. O coeficiente de sustentação apresenta uma oscilação estável com número de Strouhal $St = 0,158$. Lembrando que a oscilação do cilindro é imposta e as forças aerodinâmicas não afetam o movimento do cilindro.

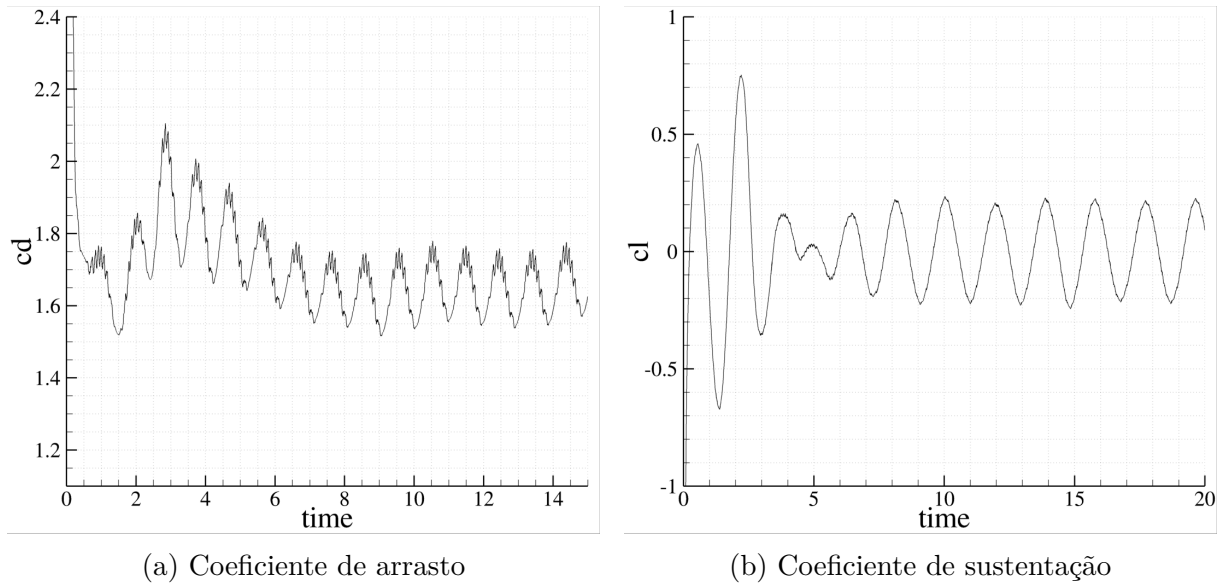
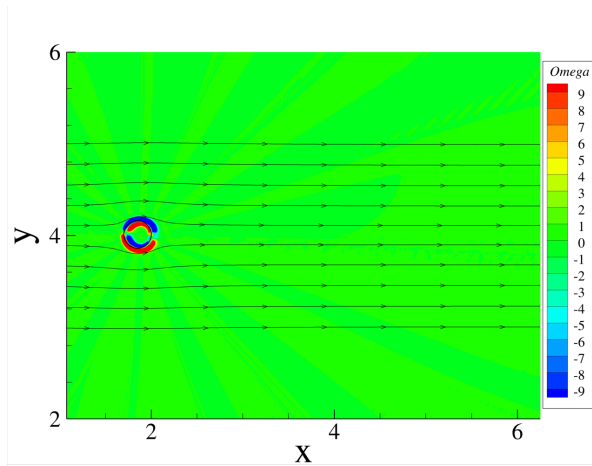
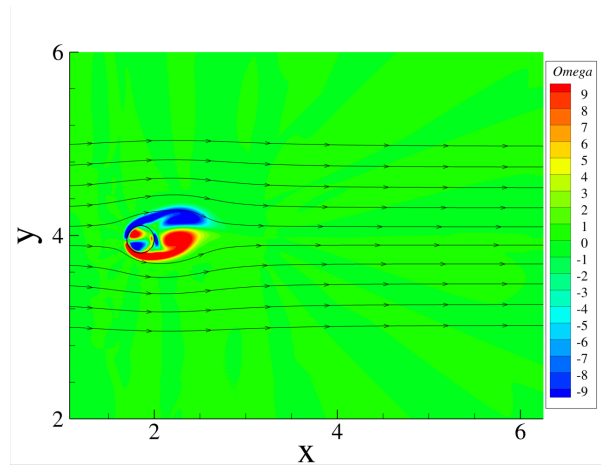


Figura 39 – Coeficientes aerodinâmicos no tempo para cilindro oscilando - $Re = 185$

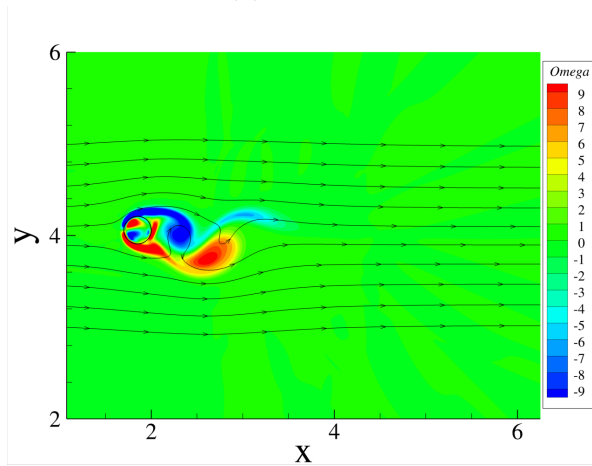
A vorticidade é mostrada na figura 40. Nesta figura, é possível visualizar a formação de vórtices a jusante do cilindro. As regiões de baixa pressão da figura 37 são os centros de cada vórtice. Nota-se que, nos instantes iniciais, os vórtices são emitidos em diferentes alturas, fato decorrente da movimentação do cilindro. Também é possível reparar que a movimentação do corpo diminui o tempo necessário para o escoamento se tornar estável, isto pode ser utilizado para poupar tempo de simulação em casos estáticos, acelerando a passagem pelo transiente instável e retornando ao repouso após a oscilação. Na superfície do cilindro, a vorticidade está contida a uma região que aparenta ser a camada limite do escoamento.



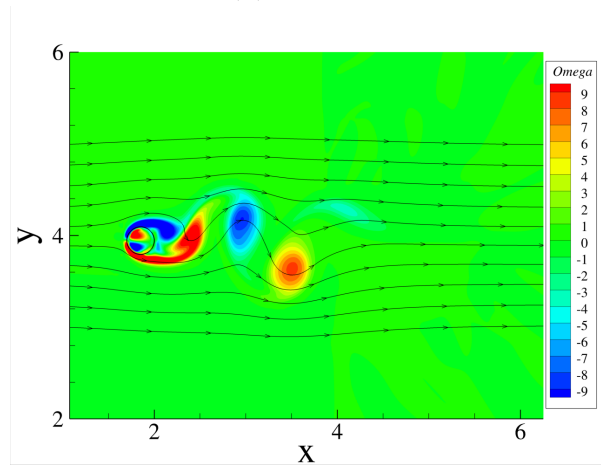
(a) $t = 0,06$



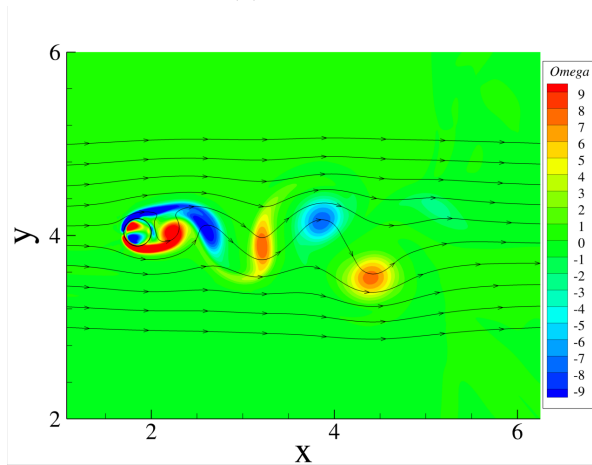
(b) $t = 1,20$



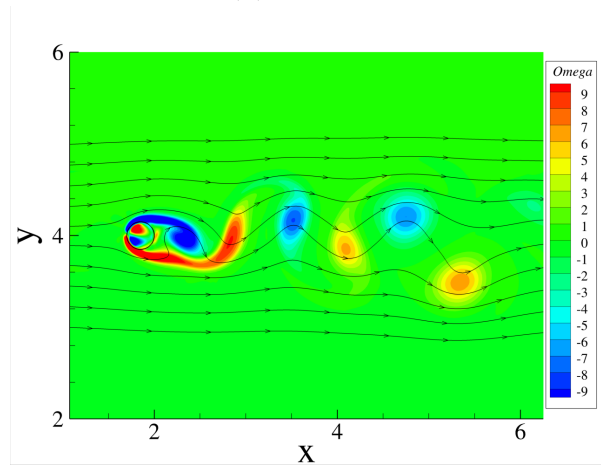
(c) $t = 2,34$



(d) $t = 3,48$



(e) $t = 4,62$



(f) $t = 5,76$

Figura 40 – Vorticidade em diferentes instantes para cilindro oscilando - $Re = 185$

5 CONCLUSÃO

5.1 Conclusões

O presente trabalho permitiu um entendimento melhor do método numérico da fronteira imersa para solução de problemas de CFD. Foi feita a implementação de um método de fronteira imersa em uma rotina de simulação que implementa o método para um escoamento ao redor de um cilindro estacionário e em oscilação vertical com condições de entrada e saída na fronteira do domínio. A rotina desenvolvida mostrou-se satisfatória apresentando resultados equivalentes com outras simulações e experimentos.

O resultado obtido para o campo de velocidades é satisfatório para todos os casos, mesmo em diferentes condições. A formação das linhas de corrente em formato ondulado indica a presença de uma esteira de Von Kármán, como era esperado. Mesmo assim, a velocidade na superfície do cilindro não era nula, apesar de ser próxima de zero, indicando que o forçamento pode ser melhor aplicado.

Os campos de pressão obtidos apresentaram as regiões de alta pressão no bordo de ataque, onde é esperado o pontos de estagnação do cilindro, e regiões de baixa pressão no bordo de fuga do cilindro, região após o descolamento da camada limite. A formação de vórtices também é evidenciada pela emissão de pontos de baixa pressão representando o centro dos vórtices.

Os coeficientes aerodinâmicos de sustentação e arrasto são gerados pela distribuição de pressão na superfície do cilindro. A oscilação na região de baixa pressão no bordo de fuga do cilindro gerou uma oscilação periódica dos coeficientes aerodinâmicos cujo período foi utilizado para determinar o número de Strouhal em cada caso. Tanto os valores dos coeficientes quanto os números de Strouhal obtidos se mostraram satisfatório apesar de uma pequena diferença com os resultados de outros autores.

Os vórtices obtidos a partir da vorticidade estão condizentes com o esperado, com emissão alternada entre o sentido dos vórtices. Os centros de cada vórtice apresentou uma região de baixa pressão, como de fato se observa tanto em experimentos quanto em outros códigos computacionais. As regiões de vorticidade mais intensa na superfície do cilindro são representativas da camada limite, como se espera.

5.2 Trabalhos Futuros

Em desenvolvimentos futuros desta implementação, deseja-se fazer um estudo de convergência de malha para determinar a ordem do método tanto no tempo quanto no espaço. Com este estudo, será possível fazer um estudo de melhorias para precisão e assim obter resultados mais próximos aos de outros autores. Junto com as melhorias relacionadas a precisão, pretende-se otimizar o código de modo a tornar viável o refinamento da malha e reduzir o tempo gasto para realização das simulações.

Posteriormente, também deseja-se adaptar a rotina para casos tridimensionais, de modo a permitir a simulação de objetos 3D tais como um cilindro finito e, quando for possível, uma turbina. Assim será possível a simulação de objetos físicos mais próximos a realidade. Adicionando certos graus de liberdade aos corpos, será possível simular uma turbina girando no próprio eixo a partir da interação com o escoamento, por exemplo. Por fim, pretende-se implementar o método de *Level Set* junto com o método da fronteira imersa, para simular escoamentos multifásicos com uma fronteira interna com liberdade para movimento, como um rio com superfície livre e fundo rio.

Referências

- FAUCI, L. J.; PESKIN, C. S. A computational model of aquatic animal locomotion. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 77, n. 1, p. 85–108, 1988.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. *Computational methods for fluid dynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- GOLDSTEIN, D.; HANDLER, R.; SIROVICH, L. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 105, n. 2, p. 354–366, 1993.
- HARTEN, A. et al. Some results on uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes. *Applied Numerical Mathematics*, Elsevier, v. 2, n. 3-5, p. 347–377, 1986.
- JUNIOR, A. et al. Turbina hidrocínética geração 3. In: *IV CONGRESSO*. [S.l.: s.n.], 2015.
- KIM, J.; KIM, D.; CHOI, H. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 171, n. 1, p. 132–150, 2001.
- KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 59, n. 2, p. 308–323, 1985.
- LAI, M.-C.; PESKIN, C. S. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *Journal of computational Physics*, Elsevier, v. 160, n. 2, p. 705–719, 2000.
- OSHER, S.; FEDKIW, R.; PIECHOR, K. Level set methods and dynamic implicit surfaces. *Appl. Mech. Rev.*, v. 57, n. 3, p. B15–B15, 2004.
- PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: a numerical method. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972.
- PESKIN, C. S. Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 25, n. 3, p. 220–252, 1977.
- PESKIN, C. S. The immersed boundary method. *Acta numerica*, Cambridge University Press, v. 11, p. 479–517, 2002.
- ROMA, A. M.; PESKIN, C. S.; BERGER, M. J. An adaptive version of the immersed boundary method. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 153, n. 2, p. 509–534, 1999.

- SAAD, Y. *Iterative methods for sparse linear systems*. [S.l.]: siam, 2003. v. 82.
- SHEWCHUK, J. R. et al. *An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain*. [S.l.]: Carnegie-Mellon University. Department of Computer Science, 1994.
- SILVA, A. L. E.; SILVEIRA-NETO, A.; DAMASCENO, J. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 189, n. 2, p. 351–370, 2003.
- TEIXEIRA, E.; BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D. Fundamentos de análise funcional. *Rio de Janeiro: SBM*, 2012.
- TÚNEL de cavitação. <http://www.ipt.br/noticias_interna.php?id_noticia=940>. Acesso em 18/11/2019.
- UHLMANN, M. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 209, n. 2, p. 448–476, 2005.
- VEDOVOTO, J. M. et al. Modelagem matemática e simulação numérica de escoamentos incompressíveis sobre geometrias complexas tridimensionais utilizando o método da fronteira imersa. Universidade Federal de Uberlândia, 2007.
- WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K. Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles. *International Journal of Multiphase Flow*, Elsevier, v. 34, n. 3, p. 283–302, 2008.
- WEINAN, E.; LIU, J.-G. et al. Gauge method for viscous incompressible flows. *Communications in Mathematical Sciences*, International Press of Boston, v. 1, n. 2, p. 317–332, 2003.